MAT729: Algébre commutative et géométrie algébrique

Chapitre I: Anneaux

Partout dans ce cours, tous les anneaux sont commutatifs avec identité.

1.1. Domaines d'intégrité

Partout dans cette section, on se fixe D un domaine d'intégrité, c'est-à-dire, D est un anneau non nul n'ayant pas de diviseurs de zéro. On appelle $a \in D$ *unité* si a admet un inverse $a^{-1} \in D$. On dit que a est *irréductible* si a est non unité et $a = bc$ avec $b, c \in D$ entraîne que b ou c est unité.

1.1.1. Définition. On appelle D *domaine à factorisation unique* si toute non unité a de D se factorise en produit d'éléments irréductibles et cette factorisation est uniquement à l'ordre près et à des unités près.

Exemple. (1) $\mathbb{Z}$ est un domaine à factorisation unique.

(2) Si K est un corps, alors $K[t]$ est un domaine à factorisation unique.

(3) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas domaine à factorisation unique. En effet, $9 = 3 \times 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$, où $3, 2 + \sqrt{-5}$ et $2 - \sqrt{-5}$ sont irréductibles.

On dit que $p \in D$ est *premier* si p est non unité et $p \mid ab$ avec $a, b \in D$ entraîne que $p \mid a$ ou $p \mid b$. Il est évident que si p est premier, alors p est irréductible. Mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, $3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ est irréductibe et $3 \mid (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ mais $3 \nmid 2+\sqrt{-5}$ et $3 \nmid 2 - \sqrt{-5}$.

1.1.2. Théorème. Un domaine d'intégrité D est un domaine à factorisation unique si et seulement si

(1) Tout élément irréductible est premier.

(2) Il n'y pas de suite infinie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots, \}$ telle que $a_{i+1} \mid a_i$ et $a_i \nmid a_{i+1}$.

En effet, (2) est équivalent à la condition que tout non unité se factorise en produit d'éléments irréductible et (1) est équivalent à l'unicité de factorisation.

Exemple. Tout domaine à idéaux principaux est un domiane à factorisation unique.

1.1.3. Théorème. Si D est un domaine à factorisation unique, alors il en est de même pour $D[t]$.

1.1.4. Corollaire. Si K est un corps, alors $K[t_1, \ldots, t_n]$ est un domaine à factorisation unique.

1.2. Le spectre d'un anneau

On se fixe A un anneau non nul. Ainsi A admet au moins un idéal maximal.

1.2.1. Définition. Un idéal P de A est dit *premier* si A/P est un domaine d'intégrité, c'est-à-dire, $P \neq A$ et $ab \in P$ entraîne que $a \in P$ ou $b \in P$.

Remarques. (1) A est un domaine d'intégrité si et seulement si 0 est un idéal premier.
(2) Un idéal maximal M de A est premier car A/M est un corps.

1.2.2. Définition. L'ensemble des idéaux premiers de A s'appelle *spectre* de A, noté $\mathrm{Spec}\,(A)$.

Remarque. $\mathrm{Spec}\,(A)$ est non vide car A admet des idéaux maximaux.

Exemples. (1) $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}) = \{(a) \mid a = 0 \text{ ou premier}\}$.
(2) Si K est un corps, alors $\mathrm{Spec}\,(K) = \{0\}$ et

$$\mathrm{Spec}\,(k[t]) = \{(f(t)) \mid f(t) = 0 \text{ ou irréductible}\}.$$

1.2.3. Proposition. Soit $\phi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Si P est un idéal premier de B, alors le *contraction* $P^{\mathrm{c}} = \phi^{-1}(P)$ de P est un idéal premier de A. Par conséquent, ϕ induit une application

$$\phi^{\mathrm{c}} : \mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A) : P \mapsto P^{\mathrm{c}}.$$

Démonstration. Si $ab \in P^c$, alors $\phi(a)\phi(b) \in P$. Ainsi $\phi(a) \in P$ ou $\phi(b) \in P$. Donc $a \in P^{\mathrm{c}}$ ou $a \in P^{\mathrm{c}}$.

1.2.4. Lemme. Soit I un idéal propre de A. Si P est un idéal de A contenant I, alors $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$ si et seulement si $P/I \in \mathrm{Spec}\,(A/I)$. Par conséquent,

$$\mathrm{Spec}\,(A/I) = \{P/I \mid I \subseteq P \in \ \mathrm{Spec}\,(A)\}.$$

Démonstration. On a $(A/I)/(P/I) \cong A/P$.

1.2.5. Définition. Soit I un idéal de A. On appelle

$$\mathrm{Var}\,(I) = \{P \in \ \mathrm{Spec}\,(A) \mid I \subseteq P\}$$

la *variété* de I.

On voit aisément que si $I \subseteq J$, alors $\mathrm{Var}\,(J) \subseteq \mathrm{Var}\,(I)$.

1.2.6. Lemme. (1) $\mathrm{Var}\,(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Var}(0) = \mathrm{Spec}\,(A)$.

(2) Soit $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Omega\}$ une famille d'idéaux de A. Alors

$$\cap_{\lambda\in\Omega}\mathrm{Var}\,(I_\lambda) = \mathrm{Var}\,(\sum_{\lambda\in\Omega} I_\lambda).$$

(3) Soient $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux de A. Alors

$$\cup_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\,(I_i) = \mathrm{Var}\,(\cap_{i=1}^{n} I_i).$$

1.2.7. Théorème. Si on définit les ensembles fermés de $\mathrm{Spec}\,(A)$ comme étant les variétés des idéaux de A, alors $\mathrm{Spec}\,(A)$ devient un espace topologique, appelé *topologie de Zariski*.

1.2.8. Proposition. Soit $I \lhd A$. Alors $\mathrm{Var}\,(I)$ admet un membre minimal.

Démonstration. $\mathrm{Var}\,(I)$ est ordonné par l'ordre " $\preceq$ " définie par $P \preceq Q$ si $Q \subseteq P$. Soit Ω une chaîne de $\mathrm{Var}\,(I)$. Alors $Q = \cap\{P \mid P \in \Omega\}$ est un majorant de Ω. Ainsi $(\mathrm{Var}\,(I), \ \preceq)$ est inductive, et donc admet un membre maximal. C'est-à-dire $(\mathrm{Var}\,(I), \subseteq)$ admet un membre minimal.

On appelle les membres minimaux de $\mathrm{Var}\,(I)$ les *idéaux premiers minimaux appartenant à I*.

Une partie S de A est dite *multiplicativement stable* si $1 \in S$ et $a, b \in S$ entraîne que $ab \in S$.

Remarquons que $P \trianglelefteq A$ est premier si et seulement si $A \backslash P$ est multiplicativement stable.

Exemple. Soit $a \in A$. Alors $\{1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots, \}$ est multiplicativement stable.

1.2.9. Lemme. Soit S une partie multiplicativement stable de A. Si I est un idéal de A tel que $I \cap S = \emptyset$, alors il existe $P \in \mathrm{Var}\,(I)$ tel que $P \cap S = \emptyset$.

Démonstration. Posons $\Omega = \{J \lhd A \mid I \subseteq J,\ J \cap S = \emptyset\}$. Alors Ω est inductive. Ainsi Ω admet un membre maximal, disons P. Soient $a, b \in A \backslash P$. Alors $I \subseteq P \subset P + aA$. Ainsi il existe $x \in S \cap (P + aA)$. De même il existe $y \in S \cap (P + bA)$. On a $x = p + ar$ et $y = q + bs$ avec $p, q \in P$ et $r, s \in A$. Or $xy = py + (ab)(rs) \in S$. Ainsi $xy \notin P$ car $P \cap S = \emptyset$. Ce qui donne $ab \notin P$. Donc P est premier.

Soit I un idéal de A. La *racine* de I est l'idéal

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \ \text{ pour un } \quad n \geq 1\}.$$

On voit aisément que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. En outre si P est premier, alors $\sqrt{P} = P$.

Rappelons que le *nilradical* de A est

$$\mathcal{N}\,(A) = \{a \in A \mid a^n \in I \ \text{ pour un } \quad n \geq 1\}.$$

On voit que $\mathcal{N}\,(A) = \sqrt{0}$.

1.2.10. Proposition. Soit $I \lhd A$. Alors $\sqrt{I} = \cap\{P \mid P \in \mathrm{Var}\,(I)\}$.

Démonstration. Si $a \in \sqrt{I}$, alors $a^n \in I$ pour un $n \geq 1$. Ainsi $a^n \in P$ pour tout $P \in \mathrm{Var}\,(I)$. Ce qui donne $a \in \cap\{P \mid P \in \mathrm{Var}\,(I)\}$.

D'autre part, supposons que $a \notin \sqrt{I}$. Alors $I \cap \{1, a, \ldots, a^n, \ldots, \} = \emptyset$. Ainsi il existe $P \in \mathrm{Var}\,(I)$ tel que $a \notin P$. Ainsi $a \notin \cap\{P \mid P \in \mathrm{Var}\,(I)\}$.

En particulier, on voit que $\mathcal{N}\,(A) = \sqrt{0} = \cap\{P \mid P \in \mathrm{Spec}\,(A)\}$. Rappelons que le *radical* $\mathrm{rad}\,(A)$ de A est l'intersection des idéaux maximaux de A. Ainsi $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathrm{rad}\,(A)$.

1.3. Idéaux primaires

On se fixe A un anneau non nul.

1.3.1. Définition. Un idéal Q de A est dit *primaire* si A/Q est non nul et tout diviseur de zéro de A/Q est nilpotent, c'est-à-dire, $ab \in Q$ entraîne que $a \in Q$ ou $b \in \sqrt{Q}$.

On voit aisément qu'un idéal premier est primaire.

Exemple. Soit $Q = (a) \lhd \mathbb{Z}$ avec $a \geq 0$. Alors Q est primaire si et seulement si $a = 0$ ou $a = p^n$ avec p premier et $n \geq 1$. En effet si $a = pqb$ avec p, q premiers distincts. Alors $qb, p^n \notin Q$ pour tout $n \geq 1$.

Rappelons que A est dit *local* si $\operatorname{rad}(A)$ est un idéal maximal et ainsi le seul idéal maximal. On sait que A est local si et seulement si tout $a \in A \backslash \operatorname{rad}(A)$ est une unité.

1.3.2. Proposition. Si Q est un idéal de A tel que $\sqrt{Q}$ est un idéal maximal, alors Q est primaire.

Démonstration. On a $\mathcal{N}(A/Q) = \sqrt{Q}/Q$, ce qui est maximal par hypothèse. Ainsi $\operatorname{rad}(A/Q) = \mathcal{N}(A/Q)$ et donc A/Q est local. Donc tout élément de A/Q est nilpotent ou une unité. Ainsi tout diviseur de zéro de A/Q est nilpotent, c'est-à-dire, Q est primaire.

Remarque. Si M est un idéal maximal de A, alors pour tout $n \geq 1$, M^n est primaire.

1.3.3. Proposition. Soit Q un idéal primaire de A. Alors $\sqrt{Q}$ est le seul idéal premier minimal appartenant à Q.

Démonstration. On voit aisément que $\sqrt{Q} \in \operatorname{Var}(Q)$. Supposons que $P \in \operatorname{Var}(Q)$. Si $a \in \sqrt{Q}$, alors $a^n \in Q$ pour un $n \geq 1$. Ainsi $a \in P$. Donc $\sqrt{Q}$ est le plus petit idéal dans $\operatorname{Var}(Q)$.

1.3.4. Définition. Soit $P \in \operatorname{Spec}(A)$. Un idéal primaire Q de A est dit *P-primaire* si $\sqrt{Q} = P$.

Exemple. Considérons l'anneau $\mathbb{Z}$. Le seul idéal 0-primaire est 0. En outre si p est un entier premier, alors les idéaux (p)-primaires sont (p^n) avec $n \geq 1$.

1.3.5. Définition. Un idéal I de A est dit *décomposable* si

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n, \quad Q_i \text{ primaire.}$$

Exemple. Soit $a \in \mathbb{Z}$ avec $a > 1$. On a $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, où les p_i sont des premiers distincts et $\alpha_i > 0$. Or

$$(a) = (p_1^{\alpha_1}) \cap \cdots \cap (p_n^{\alpha_n})$$

est une décomposition de (a). Ainsi tout idéal $I \lhd \mathbb{Z}$ est décomposable.

1.3.6. Proposition. Soit I un idéal décomposable de A. Alors le nombre des idéaux premiers minimaux appartenants à I est fini.

Démonstration. Soit $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ avec les Q_i primaires. Supposons que P est un idéal premier minimal appartenant à I. Alors $P \supseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$. Ainsi

$$P = \sqrt{P} \supseteq \sqrt{Q_1 \cap \cdots \cap Q_n} = \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_n} \supseteq \sqrt{Q_1} \cdots \sqrt{Q_n}.$$

Ainsi $P \supseteq \sqrt{Q_i}$ pour un $1 \leq i \leq n$. Donc $P = \sqrt{Q_i}$ d'après la minimalité de P. Ce qui achève la preuve.

Remarque. Si I est décomposable avec $P_1, \ldots, P_r$ les idéaux premiers minimaux appartenants à I, alors

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \cdots \cap P_r.$$

Si I est un idéal de A et $a \in A$, alors $(I : a) = \{b \mid ab \in I\}$ est un idéal de A contenant $I \subseteq (I : a)$. On voit aisément que $(I \cap J \,:\, a) = (I : a) \cap (J : a)$.

1.3.7. Lemme. Soient $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$ et Q un idéal P-primaire de A. Pour tout $a \in A$,

(1) Si $a \in Q$, alors $(Q : a) = A$.

(2) Si $a \notin Q$, alors $(Q : a)$ est P-primaire.

(3) Si $a \notin P$, alors $(Q : a) = Q$.

Démonstration. (2) Suppsons que $a \notin Q$. Comme $Q \subseteq (Q : a)$, $P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q : a)}$. Si $b \in \sqrt{(Q : a)}$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $b^n \in (Q : a)$. Ainsi $ab^n \in Q$. Comme $a \notin Q$, on a $b^n \in \sqrt{Q} = P$, et donc $b \in P$. Ce qui montre $\sqrt{(Q : a)} = \sqrt{Q} = P$. En outre suppsons que $bc \in (Q : a)$ et $b \notin (Q : a)$. Alors $ab \notin Q$. Mais $(ab)c = a(bc) \in Q$. Ainsi $c \in \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q : a)}$. Donc $(Q : a)$ est P-primaire.

(3) Suppsons que $a \notin P$. Si $b \in (Q : a)$, alors $ab \in Q$. Ce qui donne $b \in Q$ comme $a \notin \sqrt{Q}$. Ainsi $(Q : a) \subseteq Q$. Donc $(Q : a) = Q$.

1.3.8. Définition. On dit que $I \lhd A$ est *irréductible* si $I = I_1 \cap I_2$ avec $I_i \unlhd A$ entraîne que $I = I_1$ ou $I = I_2$.

Remarque. Tout idéal premier est irréductible.

1.3.9. Lemme. Soit A noethérien. Alors tout idéal irréductible de A est primaire.

Démonstration. Soit $I \lhd A$ irréductible. Supposons que $ab \in I$. Alors

$$(I : b) \subseteq (I : b^2) \subseteq \cdots \subseteq (I : b^n) \subseteq \cdots.$$

Comme A est noethérien, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $(I : b^n) = (I : b^{n_0})$ pour tout $n \geq n_0$. On veut motrer que $I = (I + Aa) \cap (I + Ab^{n_0})$. En effet, si $x \in (I + Aa) \cap (I + Ab^{n_0})$, alors $x = c + ra = d + sb^{n_0}$ avec $c, d \in I$ et $r, s \in A$. Or $xb = db + sb^{n_0+1} = cb + rab \in I$. Ainsi $sb^{n_0+1} \in I$. Donc $s \in (I : b^{n_0+1}) = (I : b^{n_0})$. Ce qui signifie que $x \in I$. Par conséquent, $I = (I + Aa) \cap (I + Ab^{n_0})$. Comme I est irréductible, soit $I = I + Aa$ soit $I = I + Ab^{n_0}$. Donc $a \in I$ ou $b \in \sqrt{I}$. Ce qui montre que I est primaire.

1.3.10. Théorème. Soit A nothérien. Alors tout $I \lhd A$ est décomposable.

Démonstration. Posons $\Omega = \{I \lhd A \mid I \text{ non décomposable}\}$. Supposons que Ω est non vide. Comme A est nothérien, Ω admet un membre maximal, disons I_0. Alor sI_0 n'est pas primaire. D'après le lemme 1.3.9, I_0 n'est pas irréductible. Donc $I_0 = I_1 \cap I_2$ avec $I_i \subset I_0$. Comme I_0 est maximal dans Ω, I_1 et I_2 sont décomposables. Ainsi I_0 l'est aussi. Ce qui est une contradiction.

1.4. Anneaux et modules de fractions

On se fixe A un anneau et S une partie multiplicativement stable. On a une relation d'équivalence " $\sim$ " sur $A \times S$ définie par

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S \text{ tel que } u(at - bs) = 0.$$

La classe d'équivalence de $(a, s) \in A \times S$ est notée $\dfrac{a}{s}$.

1.4.1. Proposition. $S^{-1}A = \{\dfrac{a}{s} \mid (a, s) \in A \times S\}$ est un anneau pour les opérations suivantes:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{et} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

On appelle $S^{-1}A$ l'*anneau des fractions de A par rapport à S*

Remarques. (1) Si A est un domaine d'intégrité, alors $(A^*)^{-1}A$ est le *corps de fractions* de A.

(2) Si $0 \in S$, alors $S^{-1}A = 0$.

Exemple. Si $b \in A$, alors $S = \{1, b, b^2, \ldots, b^n, \ldots, \}$ est multiplicativement stable. Alors

$$S^{-1}A = \{ \frac{a}{b^n} \mid a \in A,\ n \geq 0\}.$$

Dans ce cas, on note $A_b = S^{-1}A$.

1.4.2. Proposition. L'application

$$\phi : A \to S^{-1}A : a \mapsto \frac{a}{1}$$

est un homomorphisme d'anneaux. En outre

(1) Pour tout $s \in S$, $\phi(s)$ est une unité.

(2) $S^{-1}A = \{\phi(a)\phi(s)^{-1} \mid (a, s) \in A \times S\}$.

(3) $\mathrm{Ker}\,(\phi) = \cup\{(0 : s) \mid s \in S\}$.

Si $I \trianglelefteq A$, on note $S^{-1}I = \{\dfrac{a}{s} \mid (a, s) \in I \times S\}$. Remarquons que $as \in S^{-1}I$ n'entraîne pas nécessairement que $a \in I$.

1.4.3. Théorème. Supposons que $0 \notin S$ et posons $\varOmega = \{P \in \mathrm{Spec}\,(A) \mid P \cap S = \emptyset\}$. Alors

$$\Phi : \varOmega \to \mathrm{Spec}\,(S^{-1}A) : P \mapsto S^{-1}P$$

est un isomorphisme de treillis.

Démonstration. Soit $P \in \varOmega$. D'abord $\dfrac{a}{s} \in S^{-1}P$ si et seulement si $a \in P$ car $P \cap S = \emptyset$. Ainsi $S^{-1}P \neq S^{-1}A$. Or si $\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st} \in S^{-1}P$, alors $ab \in P$. Donc $a \in P$ ou $b \in P$. Par conséquent, $S^{-1}P$ est premier. En outre si $P_1, P_2 \in \Omega$, alors $P_1 \subset P_2$ si et seulement si $S^{-1}P_1 \subset S^{-1}P_2$.

Enfin soit $Q \in \mathrm{Spec}\,(S^{-1}A)$. Alors $P = \phi^{-1}(Q) \in \mathrm{Spec}\,(A)$. Si $s \in P \cap S$, alors $\frac{s}{1} \in Q$ est inversible, ce qui est impossible. Donc $P \cap S = \emptyset$. Or si $p \in P$, alors pour tout $s \in S$, $\frac{p}{s} = \phi(p)\phi(s)^{-1} \in Q$. Ainsi $S^{-1}P \subseteq Q$. Si $\frac{a}{s} \in Q$ avec $(a, s) \in A \times S$, alors $\frac{a}{1} = \frac{s}{1}\frac{a}{s} \in Q$. Ce qui donne $a \in P$. Ainsi $\frac{a}{s} \in S^{-1}P$. Par conséquent, $Q = S^{-1}P$. Ce qui achève la démonstration.

1.4.4. Définition. Soient $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$ et $S = A \backslash P$. On appelle $S^{-1}A$ la *localisation* de A à P et on note $A_P = S^{-1}A$.

1.4.5. Théorème. Soit $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$. Alors A_P est local et $\mathrm{rad}\,(A_P) = S^{-1}P$ avec $S = A \backslash P$.

Démonstration. Soit $Q \trianglelefteq S^{-1}A$ et $Q \not\subseteq S^{-1}P$. Alors il existe $\frac{a}{s} \in Q \backslash S^{-1}P$. Or $a \notin P$, et donc $a \in S$. Par conséquent, $\frac{a}{s}$ est une unité. Donc $Q = S^{-1}A$. Ce qui montre que $S^{-1}P$ est le seul idéal maximal de $S^{-1}A$.

Exemple. Soit p un entier premier. Alors

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b\}.$$

1.4.6. Corollaire. Soient $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$ et $\Omega = \{Q \in \mathrm{Spec}\,(A) \mid Q \subseteq P\}$. Alors

$$\Phi : \Omega \to \mathrm{Spec}\,(A_P) : Q \mapsto S^{-1}Q$$

est un isomorphisme de treillis, où $S = A \backslash P$.

Démonstration. Pour tout $Q \in \mathrm{Spec}\,(A)$, $Q \cap S = \emptyset$ si et seulement si $Q \subseteq P$.

Soit M un A-module. On a une relation d'équivalence " $\sim$ " sur $M \times S$ définie par

$$(x, s) \sim (y, t) \Leftrightarrow \exists u \in S \text{ tel que } u(tx - sy) = 0.$$

La classe d'équivalence de $(x, s) \in M \times S$ est notée $\frac{x}{s}$.

1.4.7. Proposition. Soit M un A-module. Alors $S^{-1}M = \{\frac{x}{s} \mid (x, s) \in M \times S\}$ est un $S^{-1}A$-module pour les opérations suivantes:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{tx + sy}{st} \quad \text{et} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{x}{t} = \frac{ax}{st}.$$

On appelle $S^{-1}A$ l'*module des fractions de M par rapport à S*

Remarque. $S^{-1}M$ est également un A-module si l'on définit

$$a \cdot \frac{x}{s} = \frac{a}{1}\frac{x}{s} = \frac{ax}{s}.$$

Si $f : M \to N$ est un homomorphisme de A-modules, alors

$$S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N : \quad \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s}$$

est un homomorphisme de $S^{-1}A$-modules. Ainsi on a un foncteur

$$S^{-1} : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, (S^{-1}A).$$

1.4.8. Théorème. Le foncteur

$$S^{-1} : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, (S^{-1}A)$$

est exact.

Démonstration. Soit $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ une suite exacte de $\mathrm{Mod}\, A$. Alors

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}L$$

est une suite de $\mathrm{Mod}\, (S^{-1}A)$ telle que $(S^{-1}g)(S^{-1}f) = 0$. Soit $x/s \in S^{-1}N$ tel que $g(x)/s = 0$. Alors il existe $u \in S$ tel que $0 = ug(x) = g(ux)$. Ainsi $ux = f(y)$ avec $y \in M$. Ce qui donne

$$x/s = (ux)/(us) = f(y)/us = (S^{-1}f)(y/us).$$

Ce qui achève la démonstration.

1.4.9. Proposition. Le foncteur S^{-1} est isomorphe au foncteur $S^{-1}A \otimes_A -$.

Démonstration. Soit M est A-module. On voit aisément qu'il existent des homomorphismes de $S^{-1}A$-modules

$$\phi_M : S^{-1}M \to S^{-1}A \otimes_R M : \quad \frac{x}{s} \mapsto \frac{1}{s} \otimes x \quad \text{et} \quad \psi_M : S^{-1}A \otimes_R M \to S^{-1}M : \quad \frac{a}{s} \otimes x \mapsto \frac{ax}{s}.$$

On voit que ϕ_M est un isomorphisme ayant pour l'inverse ψ_M. Or il est facile de vérifier que

$$\phi = \{\phi_M \mid M \in \operatorname{Mod} A\} : \quad S^{-1} \to S^{-1}A \otimes_A -$$

est un isomorphisme de foncteurs.

1.4.10. Corollaire. $S^{-1}A$ est un A-module plat.

Démonstration. $(S^{-1}A \otimes_A -) \cong S^{-1}$ est exact.

Exemples. (1) Si $P \in \operatorname{Spec}(A)$, alors A_P est un A-module plat.

(2) Si D est un domaine d'intégrité, alors le corps de fractions de D est un D-module plat. En particulier, $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat.

1.5. Anneaux noethériens

On se fixe A un anneau.

1.5.1. Théorème. L'anneau A est noethérien si et seulement si tout idéal premier de A est de type fini.

Démonstration. Supposons que A n'est pas noethérien. Alors

$$\Omega = \{I \lhd A \mid I \text{ de type infini}\}$$

est inductive. Ainsi Ω admet un membre maximal, disons P. On veut montrer que P est premier. Supposons que $ab \in P$ avec $a, b \in A \backslash P$. Alors $P \subset P + Aa$. Ainsi $P + Aa$ est de type fini, disons engendré par $x_1 + r_1 a, \ldots, x_n + r_n a$ avec $x_i \in P$ et $r_i \in A$.

Comme $ab \in P$, $b \in (P : a)$. Ainsi $P \subset (P : a)$. Ce qui implique que $(P : a)$ est de type fini. Par conséquent, $(P : a)a$ est de type fini. Or $Ax_1 + \cdots + Ax_n + (P : a)a \subseteq P$. D'autre part, si $y \in P$, alors $y = \sum_{i=1}^n s_i(x_i + r_i a) = \sum_{i=1}^n s_i x_i + (\sum_{i=1}^n s_i r_i)a$. Ainsi

$\sum_{i=1}^n s_ix_i \in (P:a)$ et donc $P = Ax_1 + \cdots + Ax_n + (P:a)a$ est de type fini, ce qui est une contradiction. Donc P est premier de type infini. Ce qui achève la preuve.

1.5.2. Corollaire. Soit A noethérien. Alors $S^{-1}A$ est noethérein pour toute partie multiplicativement stable S. En particulier A_P est noethérien pour tout $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$.

Démonstration. Si $Q \in \mathrm{Spec}\,(S^{-1}A)$, alors $Q = S^{-1}P$ avec $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$. Or P est engendré par une famille finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Ainsi $Q = S^{-1}P$ est engendré par $\{\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}\}$.

1.5.3. Théorème de base d'Hilbert. Si A est noethérien, alors $A[t]$ l'est aussi.

Démonstration. Supposons que A est noethérien. Soit $Q \trianglelefteq A[t]$. Alors

$$I = \{a \in A \mid \exists f = \sum_{i=0}^m a_it^i \in Q \text{ avec } a_m = a\}$$

est un idéal de A, et donc engendré par une famille finie $\{b_1, \ldots, b_s\}$. Pour tout $1 \le i \le s$, soit $f_i \in Q$ tel que $f_i = b_it^{m_i} + g_i$, où $g_i \in A[t]$ avec $\deg(g_i) < m_i$. Posons $L = (f_1, \ldots, f_s) \subseteq Q$ et $n = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$. Supposons que $f = a_mt^m + g \in Q$ avec $m > n$ et $\deg(g) < m$. Alors $a_m \in I$. Ainsi $a_m = c_1b_1 + \cdots + c_sb_s$. Donc

$$a_mt^m = \sum_{i=1}^s c_ib_it^{m_i}t^{m-m_i} = \sum_{i=1}^s (f_i - g_i)c_it^{m-m_i} = \sum_{i=1}^s f_ic_it^{m-m_i} - \sum_{i=1}^s c_ig_it^{m-m_i}.$$

Donc $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in L$ et $\deg(f_2) < m$. Ce qui implique que pour tout $h \in Q$, $h = h_1 + h_2$ avec $h_1 \in L$ et $\deg(h_2) \le n$. Posons $M = A + At + \cdots + At^n$. Alors $Q = L + M \cap Q$. Or M est un A-module noethérien. Par conséquent, $M \cap Q$ est de type fini en tant que A-module, et donc de type fini en tant que $A[t]$-module. Ce qui montre que Q est de type fini. Ainsi $A[t]$ est noethérien.

1.5.4 Corollaire. Si K est un corps, alors $K[t_1, \ldots, t_n]$ est noethérien.

1.5.5. Lemme. Soit A noethérien. Alors tout idéal nil de A est nilpotent.

Démonstration. Soit J un idéal nil de A. Comme A est noethérien, $J = Ax_1 + \cdots + Ax_r$. Or il existe $n \ge 1$ tel que $x_i^n = 0$ pour tout $1 \le i \le r$. On voit aisément que $J^{rn} = 0$.

1.5.6. Lemme de Nakayama. Soit M un A-module de type fini.

(1) Si I est un idéal de A tel que $aM \ne 0$ pour tout $a \in 1 + I$, alors $IM \subset M$.

(2) Si $\mathrm{rad}\,(A)\, M = M$, alors $M = 0$.

Démonstration. (1) Soit $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$. Supposons que $IM = M$. Alors

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_r, \quad a_{ij} \in I. \end{array}$$

Ainsi

$$(\delta_{ij} - a_{ij})_{n\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0.$$

Soient $\mathrm{adj}(\delta_{ij} - a_{ij})$ la matrice adjointe de $(\delta_{ij} - a_{ij})$ et $d = \det(\delta_{ij} - a_{ij})$. Alors $\mathrm{adj}(\delta_{ij} - a_{ij}) \cdot (\delta_{ij} - a_{ij}) = dI_n$, où I_n la matrice identité d'ordre n sur A. Par conséquent, $dx_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$, et donc $dM = 0$. Mais $d \in 1 + I$. Ce qui est une condtradiction. Donc $IM \neq M$.

(2) Supposons que $M \neq 0$. Comme tout $a \in 1 + \mathrm{rad}\,(A))$ est inversble, $aM \neq 0$. D'après la partie (1), $\mathrm{rad}\,(A)\, M \subset M$

1.5.7. Théorème d'intersection de Krull. Soit A noethérien. Si I est un idéal de A contenu dans $\mathrm{rad}\,(A)$, alors

$$\cap_{n=1}^{\infty} I^n = 0.$$

Démonstration. Posons $M = \cap_{n=1}^{\infty} I^n$. Alors M est de type fini car A est noethérien. D'après le lemme de Nakayama, il suffit de montrer que $\mathrm{rad}\,(A) \cdot M = M$. Supposons que $\mathrm{rad}\,(A) \cdot M \subset M$. Alors $IM \subset M$ car $I \subseteq \mathrm{rad}\,(A)$. Comme $IM \neq A$,

$$IM = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s, \quad Q_i \text{ primaire.}$$

Comme $M \not\subseteq IM,\ M \not\subseteq Q_r$ pour un $1 \leq r \leq s$. Prenons $a \in M \backslash Q_r$. Alors $Ia \subseteq IM \subseteq Q_r$. Ainsi $I \subseteq (Q_r : a)$, ce dernier est $\sqrt{Q_r}$-primaire comme $a \notin Q_r$. Donc $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{(Q_r : a)} = \sqrt{Q_r}$. Remarquons que $\sqrt{Q_r}/Q_r$ est un idéal nil de A/Q_r, et ce dernier est noethérien. D'après le lemme 1.5.5, il existe $n \geq 1$ tel que $(\sqrt{Q_r} \subseteq Q_r)^n = 0$. Ainsi $I^n \subseteq (\sqrt{Q_r})^n \subseteq Q_i$. Ce qui donne $M \subseteq Q_r$, une contradiction. Le résultat est prouvé.

1.5.8. Corollaire. Soit A noethérien local avec M l'idéal maximal. Alors $\cap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$.

1.6. Anneaux artiniens

On se fixe A un anneau non nul.

1.6.1. Lemme. Soit A un domaine d'intégrité. Si A est artinien, alors A est un corps.

Démonstration. Supposons que A est artinien. Soit $a \in A^*$. Alors

$$(a) \supseteq (a^2) \supseteq \cdots \supseteq (a^n) \supseteq \cdots.$$

Alors il existe $n \geq 1$ tel que $(a^{n+1}) = (a^n)$. Ainsi $a^n = a^{n+1}b = a^n(ab)$. Donc $ab = 1$ comme $a^n \neq 0$. Ainsi A est un corps.

1.6.2. Théorème. Soit A artinien. Alors

(1) Tout idéal premier est maximal.

(2) Le nombre des idéaux maximaux est fini.

(3) $\mathrm{rad}\,(A)$ est nilpotent. Par conséquent, $\mathcal{N}(A) = \mathrm{rad}\,(A)$.

Démonstration. (1) Soit $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$. Alors A/P est un domaine d'intégrité artinien. Ainsi A/P est un corps, c'est-à-dire, P est maximal.

(2) Supposons qu'il existe une infinité d'idéaux maximaux distincts $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$. Alors

$$M_1 \supseteq M_1 \cap M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n \supseteq \cdots.$$

Ainsi il existe $n \geq 1$ tel que $\cap_{i=1}^n M_i = \cap_{i=1}^{n+1} M_i$. Alors $M_{n+1} \supseteq M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n \supseteq M_1 \cdots M_n$. Donc $M_{n+1} \supseteq M_r$ pour un $1 \leq r \leq n$ car M_n est premier. Par conséquent $M_{n+1} = M_r$ car M_r est maximal. Ce qui donne une contradiction.

Soient $I \lhd A$ et M un A-module avec $IM = 0$. Alors M est un A/I-module. Rappelons que M est noethérien (respectivement, artinien) en tant que A-module si et seulement si M est noethérien (respectivement, artinien) en tant que A/I-module.

1.6.3. Proposition. S'il existent des idéaux maximaux $M_1, \ldots, M_n$ de A tels que $M_1 \cdots M_n = 0$, alors A est artinien si et seulement si A est noethérien.

Démonstration. Si $n = 1$, alors A est un corps. Donc A est artinien et noethérien. Supposons que $n > 1$ et le résultat est vrai pour $n - 1$. Pour tout $1 \leq i \leq n - 1$,

$\overline{M}_i = M_i/M_1 \cdots M_{n-1}$ est un idéal maximal de $\bar{A} = A/M_1 \cdots M_{n-1}$. Il est évident que $\overline{M}_1 \cdots \overline{M}_{n-1} = 0$. Ainsi $\bar{A}$ est un anneau noethérien si et seulement si $\bar{A}$ est un anneau artinien. Ce qui signifie que ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ est noethérien si et seulement si ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ est artinien. Par conséquent, ${}_A\bar{A}$ est noethérien si et seulement si ${}_A\bar{A}$ est artinien.

Comme $M_n(M_1 \cdots M_{n-1}) = 0$ et A/M_n est un corps, on voit que $M_1 \cdots M_{n-1}$ est un espace vectoriel sur A/M_n. Ainsi $M_1 \cdots M_{n-1}$ est noethérien si et seulement si $M_1 \cdots M_{n-1}$ est artinien en tant que A/M_n-module. Par conséquent, $M_1 \cdots M_{n-1}$ est noethérien si et seulement si $M_1 \cdots M_{n-1}$ est artinien en tant que A-module.

Maintenant considérons la suite exacte de A-modules suivante:

$$0 \to M_1 \cdots M_{n-1} \to A \to \bar{A} \to 0.$$

Alors A est an anneau noethérien si et seulement si ${}_AA$ est noethérien si et seulement si $M_1 \cdots M_{n-1}$ et $\bar{A}$ sont des A-modules noethériens si et seulement si $M_1 \cdots M_{n-1}$ et $\bar{A}$ sont des A-modules artiniens si et seulement si ${}_AA$ est artinien si et seulement si A est un anneau artinien.

1.6.4. Corollaire. Soit A noethérin local avec M l'idéal maximal. Alors A est artinien si et seulement si M est nilpotent.

1.6.5. Théorème. L'anneau A est artinien si et seulement si A est noethérien et tout idéal premier de A est maximal.

Démonstration. Soit A artinien. Soient $M_1, \ldots, M_n$ les idéaux maximaux de A. Alors $M_1 \cdots M_n \subseteq \cap_{i=1}^n M_i = \mathrm{rad}\,(A)$. Ce dernier est nilpotent. Ainsi il existe $m \geq 1$ tel que $(M_1 \cdots M_n)^m = 0$. Donc A est noethérien.

Supposons maintenant que A est noethérien et tout idéal premier de A est maximal. Ainsi tout idéal premier est un idéal premier minimal. Comme 0 est décomposable, le nombre d'idéaux premiers minimaux est fini. Ainsi $\mathrm{Spec}\,(A)$ est fini. Posons $\mathrm{Spec}\,(A) = \{P_1, \ldots, P_r\}$. Alors

$$\mathcal{N}(A) = \sqrt{0} = P_1 \cap \cdots \cap P_r.$$

Comme A est noethérien, $\mathcal{N}(A)$ est nilpotent. Ainsi il existe $m \geq 1$ tel que $(P-1 \cdots P_r)^m = 0$. Mais chaque P_i est maximal, donc A est artinien.

Exemple. Considérons $\mathbb{Z}$. Il est noethérien et 0 est le seul idéal premier non maximal.

Soit A local avec M l'idéal maximal. Alors le corps $K = A/M$ s'appelle le *corps résiduel* de A. Remarquons que M/M^2 est un espace vectoriel sur K.

1.6.6. Théorème. Soit A artinien local avec M l'idéal maximal et K le corps résiduel. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) A est à idéaux principaux.

(2) M est principal.

(3) $\dim_K(M/M^2) \leq 1$.

Démonstration. Il suffit de montrer que (3) implique (1). Si $\dim_K(M/M^2) = 0$, alors $M = M^2$. Remarquons que A est noethérien. Donc M est de type fini. D'après le lemme de Nakayama, $M = 0$. Par conséquent, A est un corps.

Supposons que $\dim_K(M/M^2) = 1$. Soit $x \in M\backslash M^2$. Alors $M = Ax + M^2$. Ce qui donne $M \subseteq Ax + M^r$ pour tout $r \geq 1$. Mais il existe un $n \geq 1$ tel que $M^n = 0$. Donc $M = Ax$. Soit $I \trianglelefteq A$ avec $0 \subset I \subset A$. Alors $I \subseteq M = (x)$ et $I \not\subseteq 0 = M^n = (x^n)$. Donc il existe $s \geq 1$ tel que $I \subseteq (x^s)$ et $I \not\subseteq (x^{s+1})$. Ainsi il existe $y = ax^s \in I$ avec $a \in A$ tel que $y \notin (x^{s+1})$. Donc $a \notin M$. Ce qui implique que a est une unité. Donc $x^s = a^{-1}y \in I$. Ce qui donne $I = (x^s)$. Le résultat est prouvé.

1.7. Dépendance intégrale

On se fixe A un anneau et B un sous-anneau de A.

1.7.1. Définition. On dit que $a \in A$ est *intégral* sur B s'il existent $b_1, \ldots, b_n \in B$ tels que

$$a^n + b_1 a^{n-1} + \cdots + b_{n-1} a + b_n = 0.$$

On dit que A est *intégral* sur B si tout $a \in A$ est intéral sur B.

Remarques. (1) A est intégral sur lui-même.

(2) Si B est un corps, alors $a \in A$ est intégral sur B si et seulement si a est algébrique sur B.

Exemples. (1) $\sqrt{-2} \in \mathbb{C}$ est intégral sur $\mathbb{Z}$ car $\sqrt{-2}^2 + 2 = 0$.

(2) $\alpha \in \mathbb{Q}$ est intégral sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Z}$. En effet, posons $\alpha = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ co-premieres. Soit

$$\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\alpha + c_n = 0,\ c_i \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$a^n + c_1a^{n-1}b + \cdots + c_{n-1}ab^{n-1} + c_nb^n = 0.$$

Ainsi $b \mid a^n$. Comme $(a, b) = 1$, on a $b = \pm 1$. Donc $\alpha \in \mathbb{Z}$.

1.7.2. Théorème. Soient $a \in A$ et $B[a]$ le sous-anneau de A engendré par a sur B. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) a est intégral sur B.

(2) $B[a]$ est un B-module de type fini.

(3) il existe un sous-anneau C de A tel que $B[a] \subseteq C$ et C est un B-module de type fini.

Démonstration. Supposons que

$$a^n + b_1a^{n-1} + \cdots + b_{n-1}a + b_n = 0,\ b_i \in B.$$

Comme $B[a] = \{f(a) \mid f(t) \in B[t]\}$, on voit que $B[a] = Ba^{n-1} + \cdots + Ba + B$.

Il reste de montrer que (3) implique (1). Soit $B[a] \subseteq C$ et $C = Bx_1 + \cdots + Bx_r,\ x_i \in C$. Or

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & = & b_{11}x_1 & + & \cdots & + & b_{1r}x_r \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ ax_r & = & b_{r1}x_1 & + & \cdots & + & b_{rr}x_r, \quad b_{ij} \in B. \end{array}$$

Soit I_r la matrice identité d'ordre r sur B. Alors

$$(aI_r - (b_{ij})_{r\times r}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0.$$

Ce qui donne $\det(aI_r - (b_{ij}))C = 0$. Donc $\det(aI_r - (b_{ij})) = 0$ car $1 \in C$. Ce qui donne

$$a^r + b_1a^{r-1} + \cdots + b_{r-1}a + b_r = 0,$$

où $1, b_1, \ldots, b_r$ sont les coefficients du polynôme caractéristique de $(b_{ij})_{r\times r}$. Ce qui achève la preuve.

1.7.3. Corollaire. Soit $A = B[a_1, \ldots, a_r]$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) A est intégral sur B.

(2) $a_1, \ldots, a_r \in A$ sont tous intégraux sur B.

(3) A est un B-module de type fini.

Démonstration. On voit aisément qu'il suffit de montrer que (2) implique (3). Supposons que $a_1, \ldots, a_r \in A$ sont tous intégraux sur B. On voit que $B[a_1]$ est un B-module de type fini. Supposons que $r > 1$ et $B[a_1, \ldots, a_{r-1}]$ est un B-module de type fini. Or a_r est intégral sur B et donc intégral sur $B[a_1, \ldots, a_{r-1}]$. Ainsi $A = B[a_1, \ldots, a_{r-1}][a_r]$ est un $B[a_1, \ldots, a_{r-1}]$-module de type fini. Par conséquent, A est un B-module de type fini. Ce qui achève la démonstration.

1.7.4. Proposition. Le sous-ensemble F de A des éléments intégraux sur B est un sous-anneau de A, appelé la *fermeture intégrale* de B dans A.

Démonstration. Soient $a_1, a_2 \in F$. Alors $B[a_1, a_2]$ est intégral sur B. En particulier, $a_1 - a_2, a_1a_2 \in B[a_1, a_2]$ sont intégraux sur B. Par conséquent, F est un sous-anneau de A.

On dit que B est *intégralement fermée* dans A si la fermeture intégrale de B dans A est B lui-même. Par exemple, $\mathbb{Z}$ est intégralement fermée dans $\mathbb{Q}$ mais que $\mathbb{Z}$ n'est pas intégralement fermée dans $\mathbb{R}$.

1.7.5. Proposition. Soit C un sous-anneau de B. Alors A est intégral sur C si et seulement si A est intégral sur B et B est intégral sur C.

Démonstration. Il suffit de montrer la suffisance. Supposons que A est intégral sur B et B est intégral sur C. Soit $a \in A$. Alors

$$a^n + b_1a^{n-1} + \cdots + b_{n-1}a + b_n = 0, \quad b_i \in B.$$

Ainsi a est intégral sur $C[b_1, \cdots, b_n]$. Donc $C[b_1, \cdots, b_n][a]$ est un $C[b_1, \cdots, b_n]$-module de type fini. Mais $C[b_1, \cdots, b_n]$ est un C-module de type fini. Donc $C[b_1, \cdots, b_n][a]$ est un C-module de type fini. Comme $C[a] \subseteq C[b_1, \cdots, b_n][a]$, on déduit que a est intégral sur C. Ce qui achève la preuve.

1.7.6. Corollaire. Soit F la fermeture intégrale de B dans A. Alors F est intégralement fermé dans A.

1.7.7. Théorème. Soient $B \subseteq A$ des domaines d'intégrité. Si A est intégral sur B, alors B est un corps si et seulement si A est un corps.

Démonstration. Supposons que B est un corps. Soit $a \in A^*$. Alors

$$a^n + b_1 a^{n-1} + \cdots + b_{n-1}a + b_n = 0.$$

Comme A n'a pas de diviseurs de zéro, on peut supposer que $b_n \neq 0$. Ainsi a est inversible. Donc A est un corps.

Supposons maintenant que A est un corps. Soit $b \in B^*$. Alors $b^{-1} \in A$ est intégral sur B. Donc

$$b^{-n} + b_1 b^{-n+1} + \cdots + b_{n-1}b^{-1} + b_n = 0, \quad b_i \in B.$$

Ce qui donne

$$b^{-1} + b_1 + b_2 b + \cdots + b_{n-1}b^{n-2} + b_n b^{n-1} = 0.$$

Ainsi $b^{-1} \in B$. Par conséquent B est un corps.

1.7.8. Lemme. Soit A intégral sur B.

(1) Soit $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$. Alors P est maximal dans A si et seulement si $B \cap P$ est maximal dans B.

(2) $\mathrm{Spec}\,(B) = \{P \cap B \mid P \in \mathrm{Spec}\,(A)\}$.

(3) Soient $P_1, P_2 \in \mathrm{Spec}(A)$ tels que $P_1 \cap B = P_2 \cap B$. Si $P_1 \subseteq P_2$, alors $P_1 = P_2$.

Démonstration. (1) On voit aisément que $P \cap B \in \mathrm{Spec}\,(B)$. Ainsi A/P et $B/B\cap P$ sont des domaines d'intégrité. Il est évident que A/P est intégral sur $(B + P)/P \cong B/(B \cap P)$. Ainsi A/P est un corps si et seulement si $B/(B \cap P)$ est un corps.

(2) Soit $Q \in \mathrm{Spec}\,(B)$. Posons $S = B\backslash Q$. Alors il est évident que $S^{-1}A$ est intégral sur $S^{-1}B = B_Q$. Prenons un idéal maximal M de $S^{-1}A$. Alors $S^{-1}B \cap M$ est un idéal maximal de $S^{-1}B$. Ainsi $S^{-1}B \cap M = S^{-1}Q$ comme B_Q est local. Or il existe $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$ tel que $P \cap S = \emptyset$ et $M = S^{-1}P$. En outre $S^{-1}Q = S^{-1}B \cap S^{-1}P = S^{-1}(B \cap P)$. Donc $Q = B \cap P$ car $Q \cap S = (B \cap P) \cap S = \emptyset$.

(3) Soit $Q = P_1 \cap B = P_2 \cap B$. Posons $S = B \backslash Q$. Alors $S^{-1}A$ est intégral sur $S^{-1}B$. Comme $S^{-1}Q = S^{-1}(P_i \cap B) = (S^{-1}P_i) \cap (S^{-1}B)$ est maximal dans $S^{-1}B$, on voit que $S^{-1}P_i$ est maximal dans $S^{-1}A$, $i = 1, 2$. Or $S^{-1}P_1 \subseteq S^{-2}P_2$ entraîne que $S^{-1}P_1 \subseteq S^{-2}P_2$. Par conséquent, $P_1 = P_2$ car $P_i \cap S = P_i \cap B \cap S = Q \cap S = \emptyset$.

1.7.9. Théorème de montée. Soit A intégral sur B. Si $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n$ est une suite d'idéaux premiers de B, alors il exsite une suite $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ d'idéaux premiers de A telle que $P_i \cap B = Q_i$ pout tout $0 \leq i \leq n$.

Démonstration. D'abord, il existe $P_0 \in \operatorname{Spec}(A)$ tel que $Q_0 = P_0 \cap B$. Supposons que $0 \leq m < n$ et il existe une suite $P_0 \subset \cdots \subset P_m$ d'idéaux premiers de A telle que $P_i \cap B = Q_i$ pout tout $0 \leq i \leq m$. On a

$$B/Q_m = B/(P_m \cap B) \cong (B + P_m)/P_m \subseteq A/P_m$$

et A/P_m est intégral sur $(B + P_m)/P_m$. Remarquons que $Q_{m+1}/Q_m \in \operatorname{Spec}(B/Q_m)$. Ainsi $(P_m + Q_{m+1})/P_m \in \operatorname{Spec}((B + P_m)/P_m)$. Donc il exsite $P_{m+1} \in \operatorname{Spec}(A)$ avec $P_{m+1} \supseteq P_m$ et

$$(P_m + Q_{m+1})/P_m = (P_{m+1}/P_m) \cap ((B + P_m)/P_m) = (B \cap P_{m+1} + P_m)/P_m.$$

Ce qui donne $B \cap P_{m+1} + P_m = Q_{m+1} + P_m$. Or

$$Q_{m+1} = Q_{m+1} + B \cap P_m = (Q_{m+1} + P_m) \cap B = (B \cap P_{m+1} + P_m) \cap B = B \cap P_{m+1}.$$

Comme $P_m \subseteq P_{m+1}$ et $P_m \cap B \subset P_{m+1} \cap B$, on a $P_m \subset P_{m+1}$. Ce qui achève la preuve.

1.7.10. Proposition. Soient $C \subseteq B \subseteq A$ des anneaux avec C noethérien et A intégral sur B. Si A est une C-algèbre de type fini, alors B l'est aussi.

Démonstration. Supposons que $A = C[a_1, \ldots, a_n]$, et donc $A = B[a_1, \ldots, a_n]$. Ainsi A est un B-module de type fini. Donc $A = Bx_1 + \cdots + Bx_r$. Or

$$(*) \qquad a_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} x_i,\ b_{ij} \in B,\ 1 \leq i \leq n \ \text{ et } \ x_j x_k = \sum_{l=1}^{r} c_{jkl} x_l,\ c_{jkl} \in B,\ \ 1 \leq j, k, l \leq r.$$

Posons $B_0 = C[b_{ij}, c_{jkl}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j, k, l = 1, \ldots, r]$, une sous-algèbre de B. Comme C est noethérien, B_0 l'est d'après le théorème de base d'Hilbert. Pour tout $a \in A$, $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ avec $f \in C[t_1, \ldots, t_n]$. D'après $(*)$, on a $a \in B_0 x_1 + \cdots + B_0 x_r$. Ainsi $A =$

$B_0x_1 + \cdots + B_0x_r$ est un B_0-module de type fini. Ce qui implique que A est un B_0-module noethérien. Par conséquent, B est un B_0-module de type fini. Ce qui signifie que B est une C-algèbre de type fini car B_0 l'est. Le résultat est donc prouvé.

1.7.11. Corollaire. Soient K un corps et A une K-algèbre de type fini. Soit G un group fini d'automorphismes de A. Alors

$$A^G = \{a \in G \mid g(a) = a \text{ pour tout } g \in G\}$$

est une K-algèbre de type fini et A est intégral sur A^G.

Démonstration. On voit aisément que A^G est une sous-algèbre de A. Pour tout $a \in A$,

$$p_a(t) = \Pi_{g\in G}\,(t - g(a)) = t^n + \sigma_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}t + \sigma_n$$

est un polynôme sur A^G tel que $p_a(a) = 0$. Ainsi A est intégral sur A^G. D'après le résultat précédent, A^G est de type fini en tant que K-algèbre.

1.7.12. Proposition. Soit A une B-algèbre de type fini. Si A est intégral sur B, alors $IA \lhd A$ pour tout $I \lhd B$.

Démonstration. Supposons que A est intégral sur B. Alors A est un B-module de type fini. Soit $I \lhd B$. Alors tout $a \in 1 + I$ est non nul, et donc $aA \neq 0$. D'après le lemme de Nakayama, $IA \subset A$.

1.7.13. Définition. Une partie S de A est dite *algébriquement indépendante* sur B si pour tous $a_1, \ldots, a_n \in S$ avec $n \geq 1$ et tout $f \in B[t_1, \ldots, t_n]$ non nul, $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

Remarques. (1) La famille vide est algébriquement indépendante sur B.

(2) $\{a\}$ est algébriquement indépendante sur B si et seulement si a est transcendant sur B.

(3) $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est algébriquement indépendante sur B si et seulement si $B[a_1, \ldots, a_n] \cong B[t_1, \ldots, t_n]$, la B-algèbre des polynômes sur B à n indéterminées $t_1, \ldots, t_n$.

1.7.14. Théorème de normalisation de Noether. Soient K un corps et A une K-algèbre de type fini. Alors il existe une partie finie S de A telle que S est algébriquement indépendante sur B et A est intégral sur $K[S]$.

Démonstration. Soit $A = K[u_1, \dots, u_r]$ avec $r \geq 1$. Soit S une partie finie de A avec $|S|$ minimal telle que A est intégral sur $K[S]$. Supposons que S est algébriquement dépendante sur K. Alors $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec $n \geq 1$ et il existe $f \in K[t_1, \dots, t_n]$ non nul tel que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ainsi il existe $\Lambda = \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in \mathbb{N}\}$ fini tel que

$$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \Lambda} \alpha_{r_1, \dots, r_n} t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}, \quad \alpha_{r_1, \dots, r_n} \in K^*.$$

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d > \max\{r_1 + \cdots + r_n \mid (r_1, \dots, r_n) \in \Lambda\}$. Alors pour tous $(r_1, \dots, r_n), (s_1, \dots, s_n) \in \Lambda$,

$$(r_1, \dots, r_n) = (s_1, \dots, s_n) \Leftrightarrow r_1 + r_2 d + \cdots + r_n d^{n-1} = s_1 + s_2 d + \cdots + s_n d^{n-1}.$$

Posons $b_i = a_i - a_1^{d^{i-1}}$ et donc $a_i = b_i + a_1^{d^{i-1}}$, $i = 2, \dots, n$. Remarquons que $K[a_1, a_2, \dots, a_n] = K[a_1, b_2, \dots, b_n]$. Pour tout $(r_1, \dots, r_n) \in \Lambda$,

$$a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n} = a_1^{r_1}(b_2 + a_1^d)^{r_2} \cdots (b_n + a_1^{d^{n-1}})^{r_n} = a_1^{r_1 + r_2 d + \cdots + r_n d^{n-1}} + g(a_1, b_2, \dots, b_n),$$

où le degré de a_1 dans g est plus petit que $r_1 + r_2 d + \cdots + r_n d^{n-1}$. Soit

$$m = p_1 + p_2 d + \cdots + p_n d^{n-1} = \max\{r_1 + r_2 d + \cdots + r_n d^{n-1} \mid (r_1, \dots, r_n) \in \Lambda\}.$$

Alors

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha_{p_1, \dots, p_n} a_1^m + h(a_1, b_2, \dots, b_n) = 0,$$

où le degré de a_1 dans h est plus petit que m. Comme $\alpha_{p_1, \dots, p_n} \in K^*$, a_1 est intégral sur $K[b_2, \dots, b_n]$. Par conséquent, $K[a_1, a_2, \dots, a_n] = K[b_2, \dots, b_n][a_1]$ est intégral sur $K[b_2, \dots, b_n]$. Ce qui implique que A est intégral sur $K[b_2, \dots, b_n]$, une contradiction. Donc S est algébriquement indépendante sur K. Le résultat est donc prouvé.

1.7.15. Théorème. Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Si L est une K-algèbre de type fini, alors L est une extension finie de K. En particulier, si K est algébriquement clos, alors $L = K$.

Démonstration. D'après le théorème de normalisation, il existe une famille finie $S \subseteq L$ telle que L est intéral sur $K[S]$ et S est algébriquement indépendante sur K. D'après la proposition 1.7.7, $K[S]$ est un corps. Supposons que S est non vide. Posons $S = \{a_1, \dots, a_n\}$

avec $n \geq 1$. Or $a_1 \in K[S]$ et donc $a_1^{-1} \in K[S]$. Ainsi $a_1^{-1} = f(a_1, \ldots, a_n)$ avec $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Donc $a_1 f(a_1, \ldots, a_n) - 1 = 0$. Ce qui donne une contradiction. Ainsi $S = \emptyset$, et donc $K[S] = K$. Par conséquent, L est une extension finie de K.

1.7.16. Corollaire. Soient K un corps et A une K-algèbre de type fini. Soit M un idéal maximal de A. Alors A/M est une extension finie de $\bar{K} = \{\alpha + M \mid \alpha \in K\}$. En particulier, si K est algébriquement clos, alors $A/M = \bar{K}$.

Démonstration. $\bar{K} \subseteq A/M$ est une extension de corps. De plus A/M qui est une $\bar{K}$-algèbre de type fini. Le résultat découle du théorème précédent.

Chapitre II: Théorie de la dimension

2.1. Degré de transcendance d'extensions de corps

On se fixe $K \subseteq L$ une extension de corps.

2.1.1. Définition. Une partie S de L s'appelle une *base de transcendance* de L sur K si S est algébriquement indépendante sur K et L est algébrique sur $K(S)$, le sous-corps de L engendré par S sur K.

Exemple. Soit $L = K(t_1, \ldots, t_n)$, le corps des fractions de $K[t_1, \ldots, t_n]$. Alors $\{t_1, \ldots, t_n\}$ est une base de transcendance de L sur K.

2.1.2. Théorème. (1) Il existe une base de transcendance de L sur K.

(2) Si une base de transcendance de L sur K est finie, alors toutes bases de transcendance de L sur K ont même nombre d'éléments.

Démonstration. (1) Soit Ω l'ensemble des sous-familles algébriquement indépendantes sur K. Alors Ω est inductif. Ainsi Ω admet un membre maximal S. Alors L est algébrique sur $K(S)$. Ainsi S est une base de transcendance de L sur K.

(2) Soit S une base de transcendance finie de L sur K. Si $S = \emptyset$, alors L est algébrique sur K. Ainsi $\emptyset$ est la seule base de transcendance de L sur K. Supposons maintenant que $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $n \geq 1$. Soit T une autre base de transcendance de L sur K. Supposons que $|T| \geq n$. Prenons n élément distincts $b_1, \ldots, b_n$ de T. On prétend que pour tout $0 \leq i \leq n$, il existent $n - i$ éléments $a_{j_{i+1}}, \ldots, a_{j_n}$ de S tels que L est algébrique sur $K(b_1, \ldots, b_i, a_{j_{i+1}}, \ldots, a_{j_n})$. En effet, c'est vrai pour $i = 0$. Supposons que $0 < i \leq n$ et L est algébrique sur $K(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{j_i}, \ldots, a_{j_n})$. En particulier b_i est algébrique sur $K(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{j_i}, \ldots, a_{j_n})$. Donc il existe $f_0, \ldots, f_r \in K[t_1, \ldots, t_n]$ avec $f_0 \neq 0$ tels que

$$b_i^r f_0(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{j_i}, \ldots, a_{j_n}) + \cdots + f_r(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{j_i}, \ldots, a_{j_n}) = 0. \quad (*)$$

Comme $b_1, \ldots, b_i$ sont algébriquement indépendants sur K, au moins un des $a_{j_i}, \ldots, a_{j_n}$ apparaît dans $(*)$, dison a_{j_i}. Donc a_{j_i} est algébrique sur $K(b_1, \ldots, b_i, a_{j_{i+1}}, \ldots, a_{j_n})$. Par conséquent, $K(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{j_i}, \ldots, a_{j_n})$ est algébrique sur $K(b_1, \ldots, b_i, a_{j_{i+1}}, \ldots, a_{j_n})$. Donc L est algébrique sur $K(b_1, \ldots, b_i, a_{j_{i+1}}, \ldots, a_{j_n})$. Ce qui montre que L est algébrique sur $K(b_1, \ldots, b_n)$. Donc $T = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Le résultat est donc prouvé.

Soit S une base de transcendance de L sur K. On définit le *degré de transcendance* de L sur K comme étant infini si S est infinie; et sinon, le nombre des éléments de S.

2.1.3. Lemme. Soient $B \subseteq A$ des domaines d'intégrité et soient K et L les corps des fractions de B et de A respectivement. Si A est intégral sur B, alors L est algébrique sur K.

Démonstration. Posons $S = B^*$. Alors $K = S^{-1}B$. Si A est intégral sur B, alors $S^{-1}A$ est intégral sur $S^{-1}B = K$. Donc $S^{-1}A$ est un corps. Comme $A \subseteq S^{-1}A \subseteq L$, on a $S^{-1}A = L$ car L est le corps des fractions de A. Ainsi L est algébrique sur K.

2.1.4. Théorème. Soit A une K-algèbre de type fini qui est un domaine d'intérité. Soit L le corps des fractions de A. Alors A contient une base de transcendance finie de L sur K. En particulier, le degré de transcendance de L sur K est finie.

Démonstration. D'après le théorème de normalisation de Noether, il existe une famille finie S d'éléments de A telle que S est algébriquement indépendante sur K et A est intégral sur $K[S]$. Remarquons que le sous-corps $K(S)$ de L engendré par S sur K est le corps des fractions de $K[S]$. D'après le lemme précédent, L est algébrique sur $K(S)$. Par conséquent, S est une base de transcendance finie de L sur K.

2.2. Dimension de Krull

On se fixe A un anneau non nul et B un sous-anneau de A.

2.2.1. Définition. (1) Soit $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$. La *hauteur* de P est

$$\mathrm{ht}\,(P) = \sup\{n \in I\!N \mid \exists\ \ P_0 \subset P_1 \subset \cdots\cdots \subset P_n = P,\ \ P_i \in \mathrm{Spec}\,(A)\}.$$

(2) La *dimension de Krull* de A est $\dim\,(A) = \sup\{\mathrm{ht}\,(P) \mid P \in \mathrm{Spec}\,(A)\}$.

Remarques. (1) On voit aisément que $\dim\,(A) = \sup\{\mathrm{ht}\,(M) \mid M$ idéal maximal de $A\}$. En particulier, si A est local avec M l'ideal maximal, alors $\dim\,(A) = \mathrm{ht}\,(M)$.

(2) A est artinien si et seulement si A est noethérien et $\dim(A) = 0$.

Exemples. (1) Si K est un corps, alors $\dim(K) = 0$.

(2) $\dim(\mathbb{Z}) = 1$.

2.2.2. Théorème. Soit $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Alors

(1) $\dim(A_P) = \mathrm{ht}(P)$.

(2) $\mathrm{ht}(P) + \dim(A/P) \leq \dim(A)$.

Démonstration. Posons $S = A \backslash P$. Alors toute suite d'idéaux premiers de A_P se terminante en $S^{-1}P$ est de la forme suivante:

$$S^{-1}P_0 \subset \cdots \subset S^{-1}P_n = S^{-1}P,$$

où $P_0 \subset \cdots \subset P_n = P$ est une suite d'idéaux premiers de A. Ainsi $\dim(A_P) = \mathrm{ht}(P)$.

(2) Toute suite d'idéaux premiers de A/P se commençant en 0 est de la forme suivante:

$$Q_0/P \subset Q_1/P \subset \cdots \subset Q_m/P,$$

où $P = Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_m$ est une suite d'idéaux premiers de A. Or si $P_0 \subset \cdots \subset P_n = P$ est une suite d'idéaux premiers de A, alors

$$P_0 \subset \cdots \subset P_n \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_m$$

est une suite d'idéaux premiers de A. Par conséquent, $\mathrm{ht}(P) + \dim(A/P) \leq \dim(A)$.

2.2.3. Théorème. Si A est intégral sur B, alors $\dim(A) = \dim(B)$.

Démonstration. D'après le théorème de montée, toute suite d'idéaux premiers de B est de la forme suivante:

$$P_0 \cap B \subset P_1 \cap B \subset \cdots \subset P_n \cap B,$$

où $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ est une suite d'idéaux premiers de A. Par conséquent, $\dim(A) = \dim(B)$.

2.2.4. Lemme. Soient $P \in \mathrm{Spec}(A)$ et $S = A \backslash P$. Pour tout $n \geq 1$,

$$P^{(n)} = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in S^{-1}P^n\}$$

est un idéal P-primaire de A, appelé le *n-ième puissance symbolique* de P.

Démonstration. On voit que A_P est local avec $S^{-1}P$ l'idéal maximal. Donc $S^{-1}P^n = (S^{-1}P)^n$ est $S^{-1}P$-primaire. Si $ab \in P^{(n)}$, alors $\dfrac{ab}{1} \in S^{-1}P^n$. Ainsi $\dfrac{a}{1} \in S^{-1}P^n$ ou $\dfrac{b}{1} \in \sqrt{S^{-1}P^n} = S^{-1}P$. Donc $a \in P^{(n)}$ ou $b \in \sqrt{P^{(n)}}$. Par conséquent, $P^{(n)}$ est primaire.

Enfin on voit aisément que $P \subseteq \sqrt{P^{(n)}}$. Si $a \in \sqrt{P^{(n)}}$, alors il existe $m \geq 1$ tel que $a^m \in P^{(n)}$. Donc $(\dfrac{a}{1})^m \in S^{-1}P^n$. Par conséquent, $\dfrac{a}{1} \in \sqrt{S^{-1}P^n} = S^{-1}P$. Ainsi $a \in P$. Donc $\sqrt{P^{(n)}} = P$. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. On a $P^n \subseteq P^{(n)}$.

2.2.5. Théorème des idéaux principaux de Krull. Soient A noethérien et $I = (a) \lhd A$. Si P est un idéal premier minimal appartenant à I, alors $\operatorname{ht}(P) \leq 1$.

Démonstration. D'abord supposons que A est local avec $P = \operatorname{rad}(A)$. Alors A/I est local avec $P/I = \operatorname{rad}(A/I)$. Comme P/I est un idéal premier minimal de A/I, on a $\operatorname{Spec}(A/I) = \{P/I\}$. Par conséquent, A/I est artinien. Supposons que $\operatorname{ht}(P) > 1$. Alors il existe une suite $Q_0 \subset Q \subset P$ d'idéaux premiers de A.

Soient $S = A \backslash Q$ et $Q^{(n)}$ la n-ième puissance symbolique de Q. Alors $Q^{(n)}$ est Q-primaire. Il est évident que $Q^{(n+1)} \subseteq Q^{(n)}$. Ainsi

$$(Q^{(1)} + I)/I \supseteq (Q^{(2)} + I)/I \supseteq \cdots \supseteq (Q^{(n)} + I)/I \supseteq \cdots$$

est une suite décroissante d'idéaux de A. Comme A est artinien, il existe $m > 0$ tel que $Q^{(m)} + I = Q^{(m+1)} + I$. Donc si $x \in Q^{(m)}$, alors $x = y + ar$ avec $y \in Q^{(m+1)}$ et $r \in A$. Ce qui donne $ar = x - y \in Q^{(m)}$. Remarquons $I \not\subseteq Q$ par la minimalité de P, et donc $a \notin Q$. Car $Q^{(m)}$ est Q-primaire et $a \notin Q = \sqrt{Q^{(m)}}$, on a $r \in Q^{(m)}$. Ce qui donne $Q^{(m)} = Q^{(m+1)} + aQ^{(m)}$. Comme $a \in P$, $Q^{(m)} \subseteq Q^{(m+1)} + PQ^{(m)} \subseteq Q^{(m)}$. Donc $Q^{(m)}/Q^{(m+1)} = PQ^{(m)}/Q^{(m+1)} = \operatorname{rad}(A)\left(Q^{(m)}/Q^{(m+1)}\right)$. Remarquons que $Q^{(m)}/Q^{(m+1)}$ est un A-module de type fini car A est noethérien. D'après le lemme de Nakayama, on a $Q^{(m)} = Q^{(m+1)}$. Alors $S^{-1}Q^{(m)} = S^{-1}Q^{(m+1)}$, c'est-à-dire, $(S^{-1}Q)^m = (S^{-1}Q)(S^{-1}Q)^m$. Remarquons que A_Q est noethérien local avec $\operatorname{rad}(A_Q) = S^{-1}Q$. Donc $(S^{-1}Q)^m = 0$ d'après le lemme de Nakayama. Ainsi $S^{-1}A$ est artinien car $S^{-1}A$ est noethérien. Or $Q_0 \subset Q$ entraîne que $S^{-1}Q_0 \subset S^{-1}Q$ est une suite d'ideaux premiers de A_Q. Ce qui contredit que A est artinien. Par conséquent, $\operatorname{ht}(P) \leq 1$.

Supposons que A est arbitraire. Posons $T = A\backslash P$. Alors A_P est noethérien avec $T^{-1}P$ le seul idéal maximal. Or $T^{-1}P$ est un idéal premier minimal appartenant à $T^{-1}I$, ce qui est engendré par $\frac{a}{1}$. Donc ht$\,(T^{-1}P) \leq 1$. Donc ht$\,(P)$ =dim$\,(A_P)$ =ht$\,(T^{-1}P) \leq 1$. Ce qui achève la démonstration.

2.2.6. Théorème généralisé des idéaux principaux de Krull. Soient A noethérien et $I = (a_1, \ldots, a_n) \lhd A$. Si P est un idéal premier minimal appartenant à I, alors ht$\,(P) \leq n$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat au cas où A est local avec P =rad$\,(A)$. Si $n = 1$, alors le résultat est vrai. Supposons que $n > 1$ et le résultat est vrai pour $n - 1$. Soit Q un idéal premier de A tel que $Q \subset P$ et il n'y a pas d'autre idéal premier entre Q et P. Alors $I \not\subseteq Q$. On peut supposer que $a_n \notin Q$. Remarquons que P est le seul idéal premier contenant $Q + a_nA$. Ainsi Spec$\,(A/(Q + a_nA)) = \{P/(Q + a_nA)\}$. Ce qui implique que $A/(Q + a_nA)$ est artinien local avec rad$\,(A) = P/(Q + a_nA)$. Donc il existe $m \geq 1$ tel que $P^m \subseteq Q + a_nA$. En particulier, $a_i^m \in Q + a_nA,\ i = 1, \ldots, n-1$. Posons $a_i^m = q_i + a_nr_n$ avec $q_i \in Q$ et $r_i \in A,\ i = 1, \ldots, n-1$. Considérons $\bar{A} = A/(q_1, \ldots, q_{n-1})$ et $(\overline{a_n}) \lhd \bar{A}$. Soit $U \in$ Var$\,((\overline{a_n}))$. Alors $U = W/(q_1, \ldots, q_{n-1})$ avec $W \in$ Var$\,((q_1, \ldots, q_{n-1}))$. Comme $(\overline{a_n}) \subseteq U$, on a $a_nA + (q_1, \ldots, q_{n-1}) \subseteq W$. Donc $(a_1^m, \ldots, a_{n-1}^m, a_n) \subseteq W$. Comme W est premier, $I = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \subseteq W$. Ce qui implique que $P = W$. Par conséquent, $P/(q_1, \ldots, q_{n-1})$ est un idéal minimal premier appartenant à $(\overline{a}_n)$ dans $\bar{A}$. Donc ht$\,(P/(q_1, \ldots, q_{n-1})) \leq 1$. Par conséquent, $Q/(q_1, \ldots, q_{n-1})$ est un idéal premier minimal de $\bar{A}$. Donc Q est un idéal premier minimal appartenant à $(q_1, \ldots, q_{n-1})$. Par hypothèse de récurrence, ht$\,(Q) \leq n-1$.

Soit $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_{r-1} \subset P_r = P$ une suite d'idéaux premiers de A. Comme A est noethérien, on peut supposer qu'il n'y a pas d'autre idéal premier entre P_{r-1} et P. Alors ht$\,(P_{r-1}) \leq n-1$. Ainsi $r \leq n$. Donc ht$\,(P) \leq n$. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. On voit que si $P = (a_1, \ldots, a_n) \in$ Spec$\,(A)$, alors hp$\,(P) \leq n$.

2.2.7 Théorème. Soit A noethérien local avec M l'idéal maximal et $K = A/M$. Alors

$$\dim(A) \leq \dim_K(M/M^2).$$

Démonstration. On sait que M/M^2 est un K-espace vectoriel. Comme M est un A-module de type fini, on a $\dim_K(M/M^2) = d < \infty$. Soient $x_1, \ldots, x_d \in M$ tels que

$\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d\}$ est une K-base de M/M^2. Posons $N = Ax_1 + \cdots + Ax_d \subseteq M$. Alors pour tout $y \in M$, $\bar{y} = a_1\bar{x}_1 + \cdots + a_n\bar{x}_d$, $a_i \in A$. Ainsi $M \subseteq N + M^2 \subseteq M$. Donc $M = N + M^2$. Ce qui donne $M/N = M \cdot M/N$. Comme M/N est de type fini, on a $M = N$ d'après le lemme de Nakayama. Par conséquent, $\dim(A) = \text{ht}(M) \leq d$.

2.2.8. Définition. Soit A noehtérien local avec M l'idéal maximal et $K = A/M$. On dit que A est *régulier* si $\dim(A) = \dim_K(M/M^2)$.

2.2.9. Théorème. Soit A noehtérien local de dimension d. Alors A est régulier si et seulement si l'idéal maximal M peut être engendré par d éléments.

Démonstration. Soit $K = A/M$. Si A est régulier, alors $\dim_K(M/M^2) = d$. Soient $x_1, \ldots, x_d \in M$ tels que $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d\}$ est une K-base de M/M^2. On a vu que $M = (x_1, \ldots, x_d)$.

Supposons maintenant que $M = (x_1, \ldots, x_d)$ avec $x_i \in M$. Alors $M/M^2 = K\bar{x}_1 + \cdots + K\bar{x}_d$. Ainsi $\dim_K(M/M^2) \leq d = \dim(A)$. Par conséquent, $\dim_K(M/M^2) = d$, c'est-à-dire, A est régulier.

2.2.10. Théorème. Soit K un corps algébriquement clos. Alors pour tout $n \geq 0$,

$$\dim K[t_1, \ldots, t_n] = n.$$

Démonstration. Si $n = 0$, alors $K[t_1, \ldots, t_n] = K$ et $\dim K = 0$. Supposons que $n \geq 1$. Soit M un idéal maximal de $K[t_1, \ldots, t_n]$. Alors $K/M = \bar{K}$, c'est-à dire, tout $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$ s'écrit $f = g + a$ avec $g \in M$ et $a \in K$. En particulier, $t_i = g_i + a_i$ avec $g_i \in M$ et $a_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$. Ainsi $t_i - a_i \in M$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Par conséquent, $(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n) \subseteq M$. Donc $M = (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$. Ainsi $\text{ht}(M) \leq n$. D'autre part, il existe une suite

$$0 \subset (t_1 - a_1) \subset (t_1 - a_1, t_2 - a_2) \subset \cdots \subset (t_1 - a_1, t_2 - a_2, \ldots, t_n - a_n)$$

d'idéaux premiers de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Donc $\text{ht}(M) \geq n$. Par conséquent $\text{ht}(M) = n$ pour tout idéal maximal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Ainsi $\dim K[t_1, \ldots, t_n] = n$.

2.2.11. Corollaire. Soit K un corps algébriquement clos. Soit A une K-algèbre de type fini avec $A = K[a_1, \ldots, a_n]$, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Alors $\dim(A) \leq n$.

Démonstration. On a un épimorphisme

$$\phi : K[t_1, \ldots, t_n] \to A : f(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n).$$

Posons I =Ker (ϕ). Or toute suite d'idéaux premiers de A est de la forme

$$P_0/I \subset P_1/I \subset \cdots \subset P_m/I,$$

où $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_m$ est une suite d'idéaux premiers de $K[t_1, \ldots, t_n]$ avec $I \subseteq P_0$. Ainsi dim $(A) \leq$dim $K[t_1, \ldots, t_n] = n$. Le résultat est donc prouvé.

2.2.12. Théorème. Soient K un corps algébriquement clos et A une K-algèbre de type fini. Supposons que A est un domaine d'intégrité et L est le corps des fractions de A. Alors la dimension de Krull de A est égal au degré de transcendance de L sur K.

Démonstration. D'après le théorème de normalisation de Noether, il existe une partie $S = \{a_1, \ldots, a_d\}$ de A avec $d \geq 0$ telle que S est algébriquement indépendante sur K et A est intégral sur $K[a_1, \ldots, a_d]$. Donc $K[a_1, \ldots, a_d] \cong K[t_1, \ldots, t_d]$ et $\{a_1, \ldots, a_d\}$ est une base de transcendance de L sur K. Or dim (A) =dim $K[a_1, \ldots, a_d] = d$, ce dernier est le degré de transcendance de L sur K. Le résultat est donc prouvé.

Chapitre III: Espaces affines

Partout dans ce chapitre, on se fixe K un corps algébriquement clos. Rappelons que $K[t_1, \ldots, t_n]$ est noethérien. On appelle $\mathbf{A}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in K\}$ le n-espace affine sur K. Les objets d'étude de la géometrie algébrique sont les objets géométriques (courbes, surfaces, etc) définis par des polynômes.

3.1. Nullstellensatz

Soit V une partie de $K[t_1, \ldots, t_n]$. On appelle

$$\mathcal{Z}(V) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \text{ pour tout } \ f \in V\}$$

l'*enesemble algébrique* de $\mathbf{A}^n$ défini par V. En outre, soit X une partie de $\mathbf{A}^n$. On appelle

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in K[t_1, \ldots, t_n] \mid f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \ \text{ pour tout } \ (a_1, \ldots, a_n) \in X\} \trianglelefteq K[t_1, \ldots, t_n]$$

l*idéal* de X.

Exemples. (1) $\mathcal{Z}(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$.
(2) $\mathcal{I}(\mathbf{A}^n) = 0$ et $\mathcal{I}(\emptyset) = K[t_1, \ldots, t_n]$.

Un idéal I d'un anneau est dit *radiciel* si $\sqrt{I} = I$. Remarquons que un idéal premier est radciel et $\sqrt{I}$ est radiciel pour tout idéal I.

3.1.1. Lemme. Soient $U, V \subseteq K[t_1, \ldots, t_n]$ et $X, Y \subseteq \mathbf{A}^n$.
(1) Si $U \subseteq V$, alors $\mathcal{Z}(V) \subseteq \mathcal{Z}(U)$.
(2) Si $X \subseteq Y$, alors $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$.
(3) $\mathcal{I}(X)$ est radiciel.
(4) Si I est l'idéal engendré par V, alors $\mathcal{Z}(V) = \mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\sqrt{I})$.

3.1.2. Nullstellensatz faible. Si $I \lhd K[t_1, \ldots, t_n]$, alors $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$.

Démonstration. Comme $I \lhd K[t_1, \ldots, t_n]$, I est contenu dans un idéal maximal M de $K[t_1, \ldots, t_n]$. Mais $M = (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$ avec $a_i \in K$. Ainsi $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(M) \subseteq \mathcal{Z}(I)$. Ce qui montre que $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$.

3.1.3. Nullstellensatz de Hilbert. Si $I \lhd K[t_1, \ldots, t_n]$, alors $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$.

Démonstration. D'abord, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ est radiciel et $I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$. Donc $\sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$. Supposons que $I = (f_1, \ldots, f_r)$ avec $f_i \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Soit $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$. Posons $J = (f_1, \ldots, f_r, t_{n+1}g - 1) \unlhd K[t_1, \ldots, t_n]$. Soit $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbf{A}^{n+1}$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $f_i(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0$. Alors $f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Ainsi $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$. Par conséquent, $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Donc $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \notin \mathcal{Z}(J)$. Ainsi $\mathcal{Z}(J) = \emptyset$. Ce qui implique $J = K[t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}]$. Donc

$$1 = (t_{n+1}g - 1)\, p + \sum_{i=1}^{r} f_i\, p_i, \quad p_i,\ p \in K[t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}].$$

Posons $s = \dfrac{1}{t_{n+1}}$. Alors

$$1 = (g - s)\, \frac{1}{s}\, p(t_1, \ldots, t_n, \frac{1}{s}) + \sum_{i=1}^{r} f_i(t_1, \ldots, t_n)\, p_i(t_1, \ldots, t_n, \frac{1}{s}).$$

Or il existe $m > 0$ tel que

$$s^m \left(\frac{1}{s}\, p(t_1, \ldots, t_n, \frac{1}{s}) \right) = q(t_1, \ldots, t_n, s) \ \text{ et } \ s^m\, p_i(t_1, \ldots, t_n, \frac{1}{s}) = q_i(t_1, \ldots, t_n, s)$$

sont dans $K[t_1, \ldots, t_n, s]$. Par conséquent,

$$s^m = q(t_1, \ldots, t_n, s)(g(t_1, \ldots, t_n) - s) + \sum_{i=1}^{r} q_i(t_1, \ldots, t_n, s) f_i(t_1, \ldots, t_n).$$

Posons $s = g(t_1, \ldots, t_n)$, on a

$$g^m = \sum_{i=1}^{r} q_i(t_1, \ldots, t_n, g(t_1, \ldots, t_n)) f_i(t_1, \ldots, t_n) \in I,$$

c'est-à-dire, $g \in \sqrt{I}$. Ce qui achève la démonstration.

3.1.4. Corollaire. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des ensembles algébriques de $\mathbf{A}^n$ et $\mathcal{R}$ l'ensemble des idéaux radiciels de $K[t_1, \ldots, t_n]$. Alors

$$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{R} : X \mapsto \mathcal{I}(X)$$

est un anti-isomorphisme de treillis dont l'inverse est

$$\psi : \mathcal{R} \to \mathcal{F} : I \mapsto \mathcal{Z}(I).$$

Démonstration. Soit $I \in \mathcal{R}$. Alors $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I} = I$.

D'autre part, soit $X \in \mathcal{F}$. Alors $X = \mathcal{Z}(I)$ avec $I \trianglelefteq K[t_1, \ldots, t_n]$. Ainsi $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))) = \mathcal{Z}(\sqrt{I}) = \mathcal{Z}(I) = X$. Ce qui achève la démonstration.

3.2. La topologie de Zariski

3.2.1. Lemme. Une partie X de $\mathbf{A}^n$ est un ensemble algébrique si et seulement si il existent des polynômes $f_1, \ldots, f_r \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tels que $X = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$.

Démonstration. Supposons que $X = \mathcal{Z}(V)$ avec $V \subseteq K[t_1, \ldots, t_n]$. Alors $X = \mathcal{Z}(I)$ avec I l'idéal engendré par V. Comme $K[t_1, \ldots, t_n]$ est noethérien, $I = (f_1, \ldots, f_r)$ avec $f_1, \ldots, f_r \in K[t_1, \ldots, t_n]$.

Remarque. On appelle X une *hypersurface* si $X = \mathcal{Z}(f)$ avec $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$ de degré positif. Une hypersurface de $\mathbf{A}^3$ est une *surface* et une hypersurface de $\mathbf{A}^2$ est une *courbe.*

3.2.2. Lemme. (1) $\mathbf{A}^n$ et $\emptyset$ sont des ensembles algébriques.

(2) L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique.

(3) La réunion d'une famille finie d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique.

Démonstration. (1) $\mathbf{A}^n = \mathcal{Z}(0)$ et $\emptyset = \mathcal{Z}(1)$.

(2) Soit $X_\lambda = \mathcal{Z}(I_\lambda)$ avec $I_\lambda \trianglelefteq K[t_1, \ldots, t_n]$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Alors

$$\cap\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \mathcal{Z}(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda).$$

(3) Soit $X_i = \mathcal{Z}(I_i)$ avec $I_i \trianglelefteq K[t_1, \ldots, t_n]$ pour tout $1 \le i \le n$. Alors

$$\cup_{i=1}^n X_i = \mathcal{Z}(\cap_{i=1}^n I_i).$$

Remarque. Toute partie finie est un ensemble algébrique.

3.2.3. Théorème. Le n-espace affine $\mathbf{A}^n$ est un espace topologique ayant pour ensembles fermés les ensembles algébriques. Cette topologie s'appelle la *topologie de Zariski.*

Exemples. (1) Considérons $\mathbf{A}^1$. Soit $\emptyset \subset X \subset \mathbf{A}^n$ un ensemble algébrique. Alors il existent $f_1, \ldots, f_r \in K[t]$ tous non nuls tels que $X = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r)$. Or chauqe f_i admet seulement un nombre fini de racines dans K. Ainsi X est finie. Par conséquent, les ensembles fermés propres de $\mathbf{A}^1$ sont les sous-ensembles finis.

(2) Soit $n \geq 1$ et considérons $\mathbf{A}^{n^2}$. Alors un point de $\mathbf{A}^{n^2}$ est une matrice carrée d'ordre n. Soit $\mathrm{GL}(n, K)$ le groupe des matrices inversibles d'ordre n. Alors $\mathrm{GL}(n, K)$ est un ouvert de $\mathbf{A}^n$. En effet, considérons le polynôme

$$\det\left((t_{ij})_{n\times n}\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(t_{1\sigma(1)}t_{2\sigma(2)} \cdots t_{n\sigma(n)}.$$

Alors $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, K)$ si et seulement si $\det\,(a_{ij})_{n\times n}) \neq 0$. Donc $\mathrm{GL}(n, K)$ est le complémentaire de $\mathcal{Z}(\det\,(t_{ij})_{n\times n}))$, et donc un ouvert de $\mathbf{A}^{n^2}$.

Soit T un espace topologique. Rappelons qu'un sous-ensemble X de T est lui-même un espace topologique muni de la topologie induite de celle de T. On dit que T est *irréductible* s'il n'y pas des ensembles fermés propres F_1 et F_2 tels que $T = F_1 \cup F_2$.

3.2.4. Proposition. Soit T un espace topologique irréductible. Alors tout ouvert U de T est également irréductible.

Démonstration. On peut supposer que $U \neq \emptyset$. Soit $U = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 ensembles fermés de U. Alors il exsitent des ensembles fermés E_1, E_2 de T tels que $F_i = U \cap E_i,\ i = 1, 2$. Or $E = T\backslash U$ est fermé tel que $T = E \cup U = E \cup E_1 \cup E_2$. Comme T est irréductible et $T \neq E$, on a $T = E_1$ ou $T = E_2$. Ainsi $U = F_1$ ou $U = F_2$. Ce qui montre que U est irréductible.

3.2.5. Définition. Un ensemble algébrique X de $\mathbf{A}^n$ est dit *irréductible* si X est irréductible en tant que sous-espace topologique de $\mathbf{A}^n$.

Soit T un espace topologique et X un sous-espace de T. Si X est fermé (respectivement, ouvert), alors un sous-ensemble Y de X est fermé (respectivement, ouvert) dans X si et seulement si Y est fermé (respectivement, ouvert) dans T. Ainsi un ensemble algébrique X est irréductible si et seulement si $X = X_1 \cup X_2$ avec X_1, X_2 des ensembles algébriques entraîne que $X = X_1$ ou $X = X_2$.

3.2.6. Proposition. Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Alors X est irréductible si et seulement si $\mathcal{I}(X)$ est un idéal premier de $K[t_1, \ldots, t_n]$.

Démonstration. Supposons que X est réductible. Alors $X = X_1 \cup X_2$, où X_1 et X_2 sont les ensembles algébriques avec $X_i \subset X,\ i = 1, 2$. Alors $\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{I}(X_i),\ i = 1, 2$. Prenons $f_i \in \mathcal{I}(X_i) \backslash \mathcal{I}(X)$. Alors pour tout $x \in X$, soit $f_1(x) = 0$ soit $f_2(x) = 0$. Ainsi $(f_1 f_2)(x) = 0$. Ce qui montre que $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(X)$. Donc $\mathcal{I}(X)$ n'est pas premier.

Supposons que $\mathcal{I}(X)$ n'est pas premier. Alors il existent $f, g \in K[t_1, \ldots, t_n] \backslash \mathcal{I}(X)$ tels que $fg \in \mathcal{I}(X)$. Posons $I_i = \mathcal{I}(X) + (f_i),\ i = 1, 2$. Alors $\mathcal{I}(X) \subset I_i,\ i = 1, 2$. Comme $\mathcal{I}(X)$ est radiciel, $\mathcal{Z}(I_i) \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) = X,\ i = 1, 2$. Ce qui donne $\mathcal{Z}(I_1) \cup \mathcal{Z}(I_2) \subseteq X$. Si $x \in X$, alors $f_1(x) = 0$ ou $f_2(x) = 0$ car $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(X)$. Ainsi $x \in \mathcal{Z}(I_1)$ ou $x \in \mathcal{Z}(I_2)$. Donc $X \subseteq \mathcal{Z}(I_1) \cup \mathcal{Z}(I_2)$. Ainsi $X = \mathcal{Z}(I_1) \cup \mathcal{Z}(I_2)$ est réductible.

Exemples. (1) $\mathbf{A}^n$ est irréductible car $\mathcal{I}(\mathbf{A}^n) = 0$ est premier.

(2) $GL(n, K)$ est irréductible car $GL(n, K)$ est un ouvert de $\mathbf{A}^{n^2}$.

3.2.7. Corollaire. Soit I un idéal radiciel de $K[t_1, \ldots, t_n]$. Alors $\mathcal{Z}(I)$ est irréductible si et seulement si I est premier. Par conséquent, les ensembles algébriques irréductibles correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de $K[t_1, \ldots, t_n]$.

Démonstration. Comme I est radiciel, on a $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = I$.

3.2.8. Proposition. Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Alors X contient un seul point si et seulement si $\mathcal{I}(X)$ est un idéal maximal de $K[t_1, \ldots, t_n]$. Par conséquent, les points de $\mathbf{A}^n$ correspondent biunivoqument aux idéaux maximaux de $K[t_1, \ldots, t_n]$.

Démonstration. Si $\mathcal{I}(X)$ est maximal, alors $\mathcal{I}(X) = (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$. Ainsi $X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$. Réciproquement si $X = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$, alors $X = \mathcal{Z}((t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n))$. Ainsi $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}\left(\mathcal{Z}((t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n))\right) = (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$ est maximal.

3.2.9. Théorème. Soit X un ensemble algébrique. Alors X admet une unique décomposition comme suit:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m,$$

où $X_1, \ldots, X_m$ sont des ensembles algébriques irréductibles tels que $X_i \not\subseteq X_j$ si $i \neq j$. On appelle $X_1, \ldots, X_m$ les *composantes irréductibles* de X.

Démonstration. D'abord supposons que X n'admet pas de telle décomposition. Alors il existe une suite décroissante

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_r \supset \cdots$$

d'ensembles algébriques de $\mathbf{A}^n$. Ainsi on obtient une suite croissante

$$\mathcal{I}(X_0) \subset \mathcal{I}(X_1) \subset \cdots \subset \mathcal{I}(X_r) \subset \cdots$$

d'idéaux de $K[t_1, \ldots, t_n]$, une contradiction. Donc il existent des ensembles algébriques irréductibles $X_1, \ldots, X_m$ tels que $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$. On peut supposer que m est minimal. Alors $X_i \not\subseteq X_j$ si $i \neq j$. Soit $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_p$ avec $Y_1, \ldots, Y_p$ des ensembles algébriques irréductibles avec $Y_i \not\subseteq Y_j$ si $i \neq j$. On se fixe un $1 \leq i_1 \leq m$. Alors

$$X_{i_1} = X_{i_1} \cap X = (X_{i_1} \cap Y_1) \cup (X_{i_1} \cap Y_2) \cup \cdots \cup (X_{i_1} \cap Y_p).$$

Comme X_{i_1} est irréductibe, $X_{i_1} = X_{i_1} \cap Y_{j_1}$ pour un $1 \leq j_1 \leq p$, c'est-à-dire, $X_{i_1} \subseteq Y_{j_1}$. De même, $Y_{j_1} \subseteq X_{i_2}$ pour un $1 \leq i_2 \leq m$. Ainsi $i_1 = i_2$ et $X_{i_1} = Y_{j_1}$. Maintenant on voit que la décomposition est unique.

3.2.10. Théorème. Soit $f = f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r} \in K[t_1, \ldots, t_n]$, où $f_1, \ldots, f_r$ sont irréductibles tels que $f_i \nmid f_j$ si $i \neq j$. Alors $\mathcal{Z}(f_1), \ldots, \mathcal{Z}(f_r)$ sont les composantes irréductibles de $Z(f)$. Par conséquent, les hypersurfaces irréductibles de $\mathbf{A}^n$ corréspondent biunivoquement aux polynômes irréductibles de $K[t_1, \ldots, t_n]$.

Démonstration. D'abord, (f_i) est un idéal premier de $K[t_1, \ldots, t_n]$ car f_i est irréductible. Ainsi $\mathcal{Z}(f_i)$ est irréductible. Or il est évident que

$$\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f_1) \cup \cdots \cup \mathcal{Z}(f_r).$$

Si $\mathcal{Z}(f_i) \subseteq \mathcal{Z}(f_j)$, alors $(f_j) \subseteq (f_i)$. Ainsi $f_i \mid f_j$, Ce qui donne $i = j$.

Soit $X \subseteq \mathbf{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{A}^m$. Posons

$$X \times Y = \{(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbf{A}^{n+m} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n, \ \ (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbf{A}^m\}.$$

3.2.11. Proposition. Soient X et Y des ensembles algébriques de $\mathbf{A}^n$ et de $\mathbf{A}^m$ respectivement. Alors $X \times Y$ est un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^{n+m}$.

Démonstration. Soit $X = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_p),\ f_1, \ldots, f_p \in K[t_1, \ldots, t_n]$ et $Y = \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_q)$, $g_1, \ldots, g_q \in K[t_1, \ldots, t_m]$. Pour tous $1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q$, posons

$$F_i(t_1, \ldots, t_{n+m}) = f_i(t_1, \ldots, t_n),\ \ G_j(t_1, \ldots, t_{n+m}) = g_j(t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}) \in K[t_1, \ldots, t_{n+m}].$$

On voit aisément que $X \times Y = \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_p, G_1, \ldots, G_q)$.

3.3. Fonctions régulières

On se fixe X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$.

3.3.1. Définition. Une fonction $\phi : X \to K$ est dite *régulière* s'il existe $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tel que pour tout $x = (a_1, \ldots, a_n) \in X,\ \phi(x) = f(a_1, \ldots, a_n)$. Dans ce cas, on dit que ϕ est la fonction régulière déterminée par f et on note $\phi = f|_X$.

On voit aisément que l'ensemble $K[X]$ des fonctions régulières sur X est une K-algèbre, appelée l'*anneau des coordonnées* de X, pour les opérations suivantes:

$$(\alpha\phi)(x) = \alpha\phi(x),\ (\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x),\ (\phi\psi)(x) = \phi(x)\psi(x).$$

3.3.2. Proposition. Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Alors

$$K[X] \cong K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{I}(X).$$

Par conséquent, X est irréductible si et seulement si $K[X]$ est un domaine d'intégrité.

Démonstration. On voit que

$$\Phi : K[t_1, \ldots, t_n] \to K[X] : f \mapsto f|_X$$

est un épimorphisme de K-algèbres. Or $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$ si et seulement si $f \in \mathcal{I}(X)$. Par conséquent, $K[X] \cong K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{I}(X)$.

Exemples. (1) $K[\mathbf{A}^n] \cong K[t_1, \ldots, t_n]$.

(2) Si X contient un seul point, alors $K[X] \cong K$.

(3) Soit $X = \{(a,b) \in \mathbf{A}^2 \mid ab = 1\}$. Alors $K[X] \cong K[t, t^{-1}]$.

Démonstration. On voit que $X = \mathcal{Z}(t_1t_2 - 1)$. Comme $t_1t_2 - 1$ est irréductible, on a $\mathcal{I}(X) = (t_1t_2 - 1)$. Ainsi $K[X] \cong K[t_1, t_2]/(t_1t_2 - 1)$. Il est évident que

$$\Phi : K[t_1, t_2] \to K[t, t^{-1}] : f(t_1, t_2) \mapsto f(t, t^{-1})$$

est un épimorphisme de K-algèbres et $(t_1t_2 - 1) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\Phi)$. Or tout $f \in K[t_1, t_2]$ s'écrit

$$f(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{p} f_i(t_1t_2)t_1^i + \sum_{j=1}^{q} g_j(t_1t_2)t_2^j,$$

où $f_i, g_j \in K[y]$. Si $f \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$, alors

$$\Phi(f) = \sum_{i=0}^{p} f_i(1)t^i + \sum_{j=1}^{q} g_j(1)t^{-j} = 0.$$

Donc $f_i(1) = g_j(1) = 0$, et donc $y-1 \mid f_i(y)$ et $y-1 \mid g_j(y)$, pour tous $0 \le i \le p$ et $1 \le j \le q$. Par conséquent, $t_1t_2 - 1 \mid f_i(t_1t_2)$ et $t_1t_2 - 1 \mid g_j(t_1t_2)$, pour tous $0 \le i \le p$ et $1 \le j \le q$. Ce qui donne $f \in (t_1t_2 - 1)$. Donc $K[t_1, t_2]/(t_1t_2 - 1) \cong K[t, t^{-1}]$.

3.3.3. Théorème. Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Alors X est fini si et seulement si $\dim_K K[X]$ est fini. Dans ce cas, $|X| \le \dim_K K[X]$.

Démonstration. On a $K[X] \cong K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{I}(X)$. Soient $x_1, \cdots, x_r$ des points distincts de X. Pour tout $1 \le i \le r$, $\mathcal{I}(x_1, \ldots, x_r) \subset \mathcal{I}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r)$. Ainsi il existe $f_i \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tel que $f_i(x_j) = \delta_{ij},\ j = 1, \ldots, r$. Posons $\bar{f_i} = f_i + \mathcal{I}(X),\ i = 1, \ldots, r$. Si $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \bar{f_i} = 0$ avec $\lambda_i \in K$, alors $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i \in \mathcal{I}(X)$. Donc $\lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, r$. Donc $\dim_K K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{I}(X) \ge r$. Par conséquent, si $\dim_K K[X]$ est fini, alors $|X| \le \dim_K K[X]$.

Réciproqument supposons que $X = \{(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{s1}, \ldots, a_{sn})\}$. Posons $f_j = \Pi_{i=1}^{s}(t_j - a_{ij}),\ j = 1, \ldots, n$. Alors $f_j \in \mathcal{I}(X)$, c'est-à-dire, $\bar{f_j} = 0$. Donc $\bar{t_j}$ est intégral sur K. Ainsi $K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{I}(X) = K[\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n]$ est intégral sur K. Donc $K[X]$ est un K-module de type fini. Donc $\dim_K K[X]$ est fini.

3.3.4. Proposition. Soient X et Y des ensembles algébriques de $\mathbf{A}^n$ et de $\mathbf{A}^m$ respectivement. Alors

$$K[X \times Y] \cong K[X] \otimes_K K[Y].$$

Démonstration. Soient $\phi \in K[X]$ et $\psi \in K[Y]$ déterminées par $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$ et $g \in K[t_1, \ldots, t_m]$, respectivement. Alors

$$\phi \cdot \psi : X \times Y \to K : (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \mapsto \phi(a_1, \ldots, a_n)\, \psi(b_1, \ldots, b_m)$$

est une fonction régulière déterminée par $f(t_1, \ldots, t_n)\, g(t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}) \in K[t_1, \ldots, t_{n+m}]$. Il est évident que l'application

$$K[X] \times K[Y] \to K[X \times Y] : (\phi, \psi) \mapsto \phi \cdot \psi$$

est K-bilinéaire. Ainsi il existe un homomorphisme $\Phi : K[X] \otimes_K K[Y] \to K[X \times Y]$ de K-algèbres tel que $\Phi(\phi \otimes \psi) = \phi \cdot \psi$.

Considérons $\alpha_i : X \to K : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i$ et $\beta_j : Y \to K : (b_1, \ldots, b_m) \mapsto b_j$ et $\gamma_l : X \times Y \to K : (c_1, \ldots, c_{n+m}) \mapsto c_l$. Alors $K[X \times Y] = K[\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+m}]$ et $\gamma_l = \Phi(\alpha_l \otimes 1)$ pour $1 \leq l \leq n$ et $\gamma_l = \Phi(1 \otimes \beta_l)$ pour $n+1 \leq l \leq n+m$. Ainsi Φ est surjectif.

Or supposons que $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ est une famille libre de $K[X]$ et $\{\psi_1, \ldots, \psi_q\}$ est une famille libre de $K[Y]$. Supposons que $\sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}\, \phi_i \cdot \psi_j = 0,\ \lambda_{ij} \in K$. Alors pour tous $x \in X$ et $y \in Y$,

$$0 = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \phi_i(x) \right) \psi_j(y).$$

Ainsi $\sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}\phi_i(x)\right) \psi_j = 0$, pour tout $x \in X$. Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}\phi_i(x) = 0$, pour tous $1 \leq j \leq q$ et $x \in X$. Ainsi pour tout $1 \leq j \leq q$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}\phi_i = 0$. Par conséquent, $\lambda_{ij} = 0$, pour tous $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$. Ce qui montre que $\{\phi_i \cdot \psi_j \mid 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq q\}$ est libre. Par conséquent, Φ est injective. Donc Φ est un isomorphisme.

Soient A et B des K-algèbres. On voit aisément que $A \otimes_K B$ est un domaine d'intégrité si et seulement si A et B sont des domaines d'intégrité.

3.3.5. Proposition. Soient X et Y des ensembles algébriques. Alors $X \times Y$ est irréductible si et seulement si X et Y sont tous irréductibles.

Démonstration. On a $K[X \times Y] \cong K[X] \otimes_K K[Y]$. Ainsi $X \times Y$ est irréductible st et seulement si $K[X \times Y]$ est un domaine d'intégrité si et seulement si $K[X]$ et $K[Y]$ sont des domaines d'intégrité si et seulement si X et Y sont tous irréductibles.

Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. On verra que l'anneau des coordonnées $K[X]$ joue par rapport à X le même rôle que $K[t_1, \ldots, t_n]$ par rapport à $\mathbf{A}^n$. D'abord, pour $Y \subseteq X$ et $I \subseteq K[X]$, on pose

$$\mathcal{I}_X(Y) = \{\phi \in K[X] \mid \phi(y) = 0 \text{ pour tout } y \in Y\}$$

et

$$\mathcal{Z}_X(I) = \{y \in X \mid \phi(y) = 0 \text{ pour tout } \phi \in I\}.$$

3.3.6. Théorème. Soient X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$ et $K[X]$ l'anneau des coordonnées de X.

(1) $K[X]$ est noethérien de type fini en tant que K-algèbre.

(2) Pour tout idéal I de $K[X]$, $\mathcal{I}_X(\mathcal{Z}_X(I)) = \sqrt{I}$.

(3) Le treillis des ensembles algébriques contenus dans X est anti-isomorphe au treillis des idéaux radiciels de $K[X]$ via les anti-isomorphismes $Y \mapsto \mathcal{I}_X(Y)$ et $I \mapsto \mathcal{Z}_X(I)$.

(4) Soit Y un ensemble algébrique contenu dans X. Alors Y est irréductible si et seulement si $\mathcal{I}_X(Y)$ est premier; et Y contient un seul point si et seulement si $\mathcal{I}_X(Y)$ est maximal.

Démonstration. On a l'épimorphisme de K-algèbres

$$\Phi : K[t_1, \ldots, t_n] \to K[X] : f \mapsto f|_X.$$

Ainsi on a (1). Or pour tout $Y \subseteq X$, on a $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(Y)$ et $\Phi(\mathcal{I}(Y)) = \mathcal{I}_X(Y)$; et pour tout $\mathcal{I}(X) \subseteq J \trianglelefteq K[t_1, \ldots, t_n]$, on a $\mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}_X(\Phi(J))$ et $\Phi(\sqrt{J}) = \sqrt{\Phi(J)}$.

(2) Soit $I \trianglelefteq K[X]$. Alors $I = \Phi(J)$ avec $\mathcal{I}(X) \subseteq J \trianglelefteq K[t_1, \ldots, t_n]$. Donc

$$\mathcal{I}_X(\mathcal{Z}_X(I)) = \mathcal{I}_X(\mathcal{Z}(J)) = \Phi(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = \Phi(\sqrt{J}) = \sqrt{\Phi(J)} = \sqrt{I}.$$

(3) Soit $Y \subseteq X$ un ensemble algébrique, $\mathcal{I}_X(Y) = \Phi(\mathcal{I}(Y))$. Ainsi

$$\mathcal{Z}_X(\mathcal{I}_X(Y)) = \mathcal{Z}_X(\Phi(\mathcal{I}(Y))) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = Y.$$

Soit $I \trianglelefteq K[X]$ radiciel. Alors $I = \Phi(J)$, où J est un idéal radiciel de $K[t_1, \ldots, t_n]$ avec $\mathcal{I}(X)$. Ainsi

$$\mathcal{I}_X(\mathcal{Z}_X(I)) = \mathcal{I}_X(\mathcal{Z}(J)) = \Phi(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J))) = \Phi(J) = I.$$

(4) Soit $Y \subseteq X$ un ensemble algébrique. Alors $\Phi(\mathcal{I}(Y)) = \mathcal{I}_X(Y)$. Ainsi Y est irréductible (respectivement, contient un seul point) si et seulement si $\mathcal{I}(X)$ est premier (respectivement, maximal) si et seulement si $\Phi(\mathcal{I}(Y))$ est premier (respectivement, maximal) si et seulement si $\mathcal{I}_X(Y)$ est premier (respectivement, maximal).

Enfin on étudiera quelle algèbre est l'algèbre des coordonnées d'un ensemble algébrique. Un anneau A est dit *réduit* si $\mathcal{N}(A) = 0$, c'est-à-dire, A n'a pas de diviseurs de zéro.

3.3.7. Proposition. Soit A une K-algèbre. Alors A est isomorphe à l'anneau des coordonnées d'un ensemble algébrique si et seulement si A est réduite de type fini.

Démonstration. Soit X un ensemble algèbrique de $\mathbf{A}^n$. Alors $\mathcal{I}(X)$ est radiciel et $K[X] \cong K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{I}(X)$. Il est évident que $K[X]$ est de type fini en tant que K-algèbre. En outre,

$$\mathcal{N}\left(K[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{I}(X)\right) = \sqrt{\mathcal{I}(X)}/\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(X)/\mathcal{I}(X) = 0.$$

Donc $K[X]$ est réduit.

Réciproquement supposons que A est réduit de type fini en tant que K-algébre. Soit $A = K[a_1, \ldots, a_n]$. Alors $A \cong K[t_1, \ldots, t_n]/I$ avec $I \trianglelefteq K[t_1, \ldots, t_n]$. Comme A est réduit,

$$\mathcal{N}\left(K[t_1, \ldots, t_n]/I\right) = \sqrt{I}/I = 0.$$

Ainsi I est radiciel. Posons $X = \mathcal{Z}(I)$. Alors $\mathcal{I}(X) = I$ et donc $K[X] \cong K[t_1, \ldots, t_n]/I \cong A$. Le résultat est donc prouvé.

3.4. Applications régulières

On se fixe X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$ et Y un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^m$.

3.4.1. Définition. Une application $\phi : X \to Y$ est dite *régulière* s'il existent m fonctions régulières $\phi_1, \ldots, \phi_m$ sur X telles que $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))$, pour tout $x \in X$.

Remarque. Une fonction régulière sur X n'est rien qu'une application régulière de X dans $\mathbf{A}^1$.

Exemples. (1) Toute application linéaire $\phi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ est régulière.

Démonstration. D'abord soit $\phi : \mathbf{A}^n \to K$ une application linéaire. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique du K-espace vectoriel $\mathbf{A}^n$. Posons $\lambda_i = \phi(e_i) \in K, i = 1, \ldots, n$. Alors pour tout $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n$, on a $\phi(x) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Ainsi ϕ est une fonction régulière déterminée par le polynôme $f = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n$. Or $\phi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ une application linéaire. Pour tout $1 \le i \le m$, $\beta_i : \mathbf{A}^m \to K : (b_1, \ldots, b_m) \mapsto b_i$ est linéaire. Ainsi $\phi_i = \beta_i \circ \phi : \mathbf{A}^n \to K$ est linéaire et donc régulière. En outre pour tout $x \in X$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))$.

(2) Soit X l'hyperbole de $\mathbf{A}^2$ définie par léquation $t_1 t_2 = 1$. Alors

$$\phi : X \to \mathbf{A}^1 : (a, b) \mapsto \frac{1}{a}$$

est une application régulière. En effet $f = t_2 \in K[t_1, t_2]$ est tel que pour tout $x = (a, b) \in X$, $\phi(x) = \dfrac{1}{a} = b = f(x)$.

(3) Soient X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$ et $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Soit $Y \subseteq X \times \mathbf{A}^1$ défini par l'équation $t_{n+1} f(t_1, \ldots, t_n) = 1$. Alors

$$\psi : Y \to \mathbf{A}^1 : (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \mapsto \frac{1}{f(a_1, \ldots, a_n)}$$

est une application régulière. En effet, $g = t_{n+1} \in K[t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}]$ tel que pour tout $y = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in Y$,

$$\psi(y) = \frac{1}{f(a_1, \ldots, a_n)} = a_{n+1} = g(y).$$

3.4.2. Lemme. La composée de deux applications régulières est régulière.

Démonstration. Soient $\phi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ des applications régulières, où X, Y et Z sont des ensembles algébriques de $\mathbf{A}^n$, de $\mathbf{A}^m$ et de $\mathbf{A}^p$ respectivemnt. Alors il exsitent $f_1, \ldots, f_m \in K[t_1, \ldots, t_n]$ et $g_1, \ldots, g_p \in K[t_1, \ldots, t_p]$ tels que $\phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, pour tout $x \in X$ et $\psi(y) = (g_1(y), \ldots, g_p(y))$, pour tout $y \in Y$. Pour $1 \le i \le p$, posons

$$h_i = g_i(f_1(t_1, \ldots, t_n),\ \cdots,\ f_m(t_1, \ldots, t_n)) \in K[t_1, \ldots, t_n].$$

Alors pour tout $x \in X$, $(\psi \circ \phi)(x) = (h_1(x), \ldots, h_p(x))$. Donc $\psi \circ \phi$ est régulière.

Si $\phi_1, \ldots, \phi_m \in K[X]$, on pose $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m) : X \to \mathbf{A}^m$ par $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))$ pour tout $x \in X$.

3.4.3. Lemme. Soit $\phi_1, \ldots, \phi_m \in K[X]$. Alors $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ définit une application régulière de X dans Y si et seulement si pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$, $f(\phi_1, \ldots, \phi_m) = 0$ dans $K[X]$.

Démonstration. ϕ définit une application régulière de X dans Y si et seulment si $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x)) \in Y$ pour tout $x \in X$ si et seulment si pour tous $x \in X$ et $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$,

$$0 = f(\phi(x)) = f(\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x)) = (f(\phi_1, \ldots, \phi_m))(x)$$

si et seulment si $f(\phi_1, \ldots, \phi_m) = 0$ pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$.

3.4.4. Proposition. (1) Si $\phi : X \to Y$ est une application régulière, alors

$$\phi^* : K[Y] \to K[X] : \gamma \mapsto \gamma \circ \phi$$

est un homomorphisme de K-algèbres.

(2) Si $\phi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ des applications régulières, alors $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

(3) Si $\Phi : K[Y] \to K[X]$ est un homomorphisme de K-algèbres, alors il existe une seulement application régulière $\phi : X \to Y$ telle que $\Phi = \phi^*$.

Démonstration. (1) Soit $\gamma \in K[Y]$. Comme γ et ϕ sont régulières, $\gamma \circ \phi$ est régulière. Ainsi $\phi^*(\gamma) \in K[X]$. Il est évident que ϕ^* est un homomorphisme de K-algèbres.

(3) Soit $\Phi : K[Y] \to K[X]$ un homomorphisme de K-algèbres. Remarquons que

$$\beta_i : Y \to K : (b_1, \ldots, b_m) \to b_i, \ i = 1, \ldots, m$$

sont des fonctions régulières sur Y telles que $K[Y] = K[\beta_1, \ldots, \beta_m]$. Posons $\phi_i = \Phi(\beta_i) \in K[X]$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. Or pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$, $f(\beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$ dans $K[Y]$. Ainsi pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$,

$$f(\phi_1, \ldots, \phi_m) = f(\Phi(\beta_1), \ldots, \Phi(\beta_m)) = \Phi(f(\beta_1, \ldots_m)) = \Phi(0) = 0.$$

Ce qui montre que $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ définit une application de X dans Y. Or pour tout $1 \leq i \leq m$, $\phi^*(\beta_i) = \beta_i \phi = \phi_i = \Phi(\beta_i)$. Ainsi $\phi^* = \Phi$ car $K[Y] = K[\beta_1, \ldots, \beta_m]$.

En outre soit $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) : X \to Y$ est une application régulière telle que $\psi^* = \Phi$. Alors pour tout $1 \leq i \leq m$, $\psi_i = \beta_i \psi = \psi^*(\beta_i) = \Phi(\beta_i) = \phi_i$. Ainsi $\psi = \psi$.

Remarque. On voit aisément que $\mathbb{1}_X^* = \mathbb{1}_{K[X]}$.

3.4.5. Proposition. Soit $\phi : X \to Y$ une application régulière. Alors l'homomorphisme $\phi^* : K[Y] \to K[X]$ est injectif si et seulement si $\phi(X)$ est dense dans Y (c'est-à-dire, Y est la fermeture de $\phi(X)$ dans Y).

Démonstration. Soit Z la fermeture de $\phi(X)$ dans X. Pour tout $\gamma \in K[Y]$, $\gamma \in \mathrm{Ker}(\phi^*)$ si et seulement si $\gamma(\phi(x)) = 0$ pour tout $x \in X$ si et seulement si $\phi(X) \subseteq \mathcal{Z}_Y(\gamma)$ si et seulment si $Z \subseteq \mathcal{Z}_Y(\gamma)$ car $\mathcal{Z}(\gamma)$ est fermé.

Supposons que $\phi(X)$ est dense dans Y. Si $\gamma \in \mathrm{Ker}(\phi^*)$, alors $Y = Z = \mathcal{Z}_Y(\gamma)$. Ainsi $\gamma = 0$. Donc ϕ^* est injectif.

Supposons que $\phi(X)$ n'est pas dense dans Y. Alors $Z = \mathcal{Z}(I)$ avec $I \trianglelefteq K[Y]$ non nul. Prenons $\gamma \in I$ non nul. Alors $Z \subseteq \mathcal{Z}(\gamma)$. Ainsi $\gamma \in \mathrm{Ker}(\phi^*)$. Donc ϕ^* n'est pas injectif.

3.4.6. Définition. (1) Une application régulière $\phi : X \to Y$ s'appelle *isomorphisme* s'il existe une application régulière $\psi : Y \to X$ telle que $\psi \circ \phi = \mathbb{1}_X$ et $\phi \circ \psi = \mathbb{1}_Y$.

(2) On dit que X et Y sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\phi : X \to Y$.

Remarque. Un isomorphisme est nécessairement bijectif. Mais un application régulière bijective n'est pas nécessairement isomorphisme.

Exemples: (1) Soit X la parabole généralisée définie par l'équation $t_2 = t_1^k$ avec $k \geq 2$. Alors $X \cong \mathbf{A}^1$.

Démonstration. On voit que $\phi : X \to \mathbf{A}^1 : (a, b) \mapsto a$ et $\psi : \mathbf{A}^1 \to X : a \mapsto (a, b^k)$ sont régulières telles que $\phi \circ \psi = \mathbb{1}_{\mathbf{A}^1}$ et $\psi \circ \phi = \mathbb{1}_X$.

(2) Soit X l'hyperbole de $\mathbf{A}^2$ définie par léquation $t_1 t_2 = 1$. La projection

$$p : X \to \mathbf{A}^1 : (a, b) \mapsto a$$

est régulière, mais pas un isomorphisme.

(3) Soit X la courbe de $\mathbf{A}^2$ définie par l'équation $t_2^2 = t_1^3$. Alors

$$\phi : \mathbf{A}^1 \to X : a \mapsto (a^2, a^3)$$

est régulière bijective. Mais ϕ n'est pas un isomorphisme.

Démonstration. Supposons que ϕ est un isomorphisme. Alors ϕ^{-1} est régulière. Supposons que ϕ^{-1} est déterminée par $f(t_1, t_2) \in K[t_1, t_2]$. Alors $f(0,0) = \phi^{-1}(0,0) = 0$. Donc

$$f = \sum_{r_1+r_2>0} \alpha_{r_1r_2} t_1^{r_1} t_2^{r_2},\ \alpha_{r_1r_2} \in K.$$

Alors pour tout $a \in K^*$, on a

$$a = \phi^{-1}(\phi(a)) = f(a^2, a^3) = \sum_{r_1+r_2>0} \alpha_{r_1r_2} a^{2r_1+3r_2}.$$

Donc $g(t) = t - \sum_{r_1+r_2>0} \alpha_{r_1r_2} t^{2r_1+3r_2}$ est un polynôme non nul ayant une infinité de racines dans K. Ce qui est impossible.

3.4.7. Proposition. X et Y sont isomorphes si et seulement si $K[X]$ et $K[Y]$ sont isomorphes.

Démonstration. Soient $\phi : X \to Y$ et $\psi : Y \to X$ des applications régulières telles que $\psi \circ \phi = \mathbb{1}_X$ et $\phi \circ \psi = \mathbb{1}_Y$. Alors $\mathbb{1}_{K[X]} = \mathbb{1}_X^* = (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$. De même, $\psi^* \circ \phi^* = \mathbb{1}_{K[Y]}$. Ainsi $K[Y] \cong K[X]$.

Réciproquement soient $\Phi : K[X] \to K[Y]$ et $\Psi : K[Y] \to K[X]$ des homomorphismes de K-algèbres tels que $\Phi \circ \Psi = \mathbb{1}_{K[Y]}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathbb{1}_{K[X]}$. Or il existent des applications régulières $\phi : Y \to X$ et $\psi : X \to Y$ telles que $\phi^* = \Phi$ et $\psi^* = \Psi$. Alors $(\psi \circ \phi)^* = \Phi \circ \Psi = \mathbb{1}_{K[Y]} = \mathbb{1}_Y^*$. Donc $\psi \circ \phi = \mathbb{1}_Y$. De même $\phi \circ \psi = \mathbb{1}_X$.

On a prouvé que la catégorie des ensembles algébriques ayant pour morphismes les applications régulières est anti-équivalente à la catégorie des K-algèbres réduites de type fini.

3.5. Fonctions rationnelles et applications rationnelles

On se fixe X un ensemble algébrique irréductible de $\mathbf{A}^n$ et Y et Z des ensembles algébriques de $\mathbf{A}^m$ et de $\mathbf{A}^p$ respectivement. Remarquons que $K[X]$ est un domaine d'intégrité.

3.5.1. Définition. Soient $\phi, \psi \in K[X]$ avec $\psi \neq 0$. On appelle $\dfrac{\phi}{\psi}$ une *fonction rationnelle sur* X. De plus,

$$K(X) = \{\frac{\phi}{\psi} \mid \phi, \psi \in K[X]\},$$

le corps des fractions de $K[X]$, s'appelle le *corps des fonctions rationnelles* de X.

Remarquons qu'une fonction rationnelle sur X n'est pas nécessairement définie en chaque point de X.

3.5.2. Définition. Soit θ une fonction rationnelle sur X. On dit que θ est *régulière* en un point $x \in X$ s'il existent $\phi, \psi \in K[X]$ tel que $\theta = \dfrac{\phi}{\psi}$ et $\psi(x) \neq 0$. Dans ce cas, on définit $\theta(x) = \dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}$.

Remarquons que $\theta(x)$ est correctment définie si θ est régulière en x. En effet, si $\phi_1, \psi_1 \in K[X]$ tel que $\theta = \dfrac{\phi_1}{\psi_1}$ et $\psi_1(x) \neq 0$. Alors $\phi\psi_1 = \psi\phi_1$. Ainsi $\phi(x)\psi_1(x) = \psi(x)\phi_1(x)$. Ce qui donne $\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\phi_1(x)}{\psi_1(x)}$.

Exemple. La fonction rationnelle $\theta = t_1 t_2$ sur $\mathbf{A}^2$ n'est pas régulière en $(0,0)$. En effet s'il existent $f, g \in K[t_1, t_2]$ tels que $\theta = fg$ avec $g(0,0) \neq 0$. Alors $t_2 f = g$. Ce qui donne $g(0,0) = 0$, une contradiction.

3.5.3. Proposition. Si $\theta \in K(X)$, alors

$$U = \{x \in X \mid \theta \text{ est régulière en } x\}$$

est un ouvert non vide de X, appelé le *domaine de définition* de θ.

Démonstration. Soit $\theta = \dfrac{\phi}{\psi}$, où $\phi, \psi \in K[X]$ avec $\psi \neq 0$. Ainsi il existe un $x \in X$ tel que $\psi(x) \neq 0$. Donc $x \in U$. Or pour tout $y \in U$, il existent $\phi_y, \psi_y \in K[X]$ avec $\psi_y(y) \neq 0$ tel que $\theta = \dfrac{\phi_y}{\psi_y}$. Remarquons que $U_y = \{z \in X \mid \phi_y(z) \neq 0\}$ est un ouvert de X contenu dans U. Par conséquent, $U = \cup\{U_y \mid y \in U\}$ est un ouvert de X.

3.5.4. Lemme. Soit T un espace topologique irréductible. Si U_1 et U_2 sont des ouverts non vides de T, alors $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Démonstration. Ponsons $F_i = T \backslash U_i$, $i = 1, 2$. Alors $F_i \subset T$ est fermé, $i = 1, 2$. Supposons que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Alors $U_2 \subseteq F_1$. Donc $X = F_2 \cup U_2 = F_1 \cup F_2$, une contradiciton. Ce qui achève la démonstration.

3.5.5. Corollaire. Si $\theta_1, \ldots, \theta_r \in K(X)$, alors il existe un ouvert non vide U de X tel que chaque θ_i est défini sur U.

3.5.6. Proposition. Soient θ_1 et θ_2 des fonctions rationnelles sur X. Alors $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si il existe un ouvert non vide U de X tel que pour tout $x \in U$, $\theta_1(x) = \theta_2(x)$.

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de X tel que pour tout $x \in U$, $\theta_1(x) = \theta_2(x)$. Considérons $\theta = \theta_1 - \theta_2 \in K(X)$. Alors θ s'annule sur U. On se fixe un $x \in U$. Alors $\theta = \dfrac{\phi_x}{\psi_x}$, où $\phi_x, \psi_x \in K[X]$ tels que $\phi_x(x) = 0$ et $\psi_x(x) \neq 0$. Or pour tout $y \in U$, $\theta = \dfrac{\phi_y}{\psi_y}$, où $\phi_y, \psi_y \in K[X]$ tels que $\phi_y(y) = 0$ et $\psi_y(y) \neq 0$. Comme $\phi_x \psi_y = \phi_y \psi_x$, on a $\phi_x(y) = 0$. Ainsi $U \subseteq \mathcal{Z}_X(\phi_x)$. Ce qui donne $X = (X \backslash U) \cup \mathcal{Z}_X(\phi_x)$. Comme U est non vide et X est irréductible, on a $X = \mathcal{Z}_X(\phi_x)$. Donc $\phi_x = 0$. Par conséquent $\theta = 0$, c'est-à-dire, $\theta_1 = \theta_2$.

3.5.7. Définition. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_m \in K(X)$. On appelle $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ une *application rationnelle* de X dans Y si $(\theta_1(x), \ldots, \theta_m(x)) \in Y$ lorsque les θ_i sont toutes régulières en x. Dans ce cas on dit que θ est *régulière* en x et on note $\theta(x) = (\theta_1(x), \ldots, \theta_m(x))$.

Le *domaine de définition* de $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) : X \to Y$ est l'ensemble des points $x \in X$ tel que θ est régulière en x, ce qui est un ouvert non vide de X.

On appelle $\theta(X) = \{\theta(x) \mid \theta \text{ est régulière en } x\}$ l'*image* de θ.

Remarque. Une fonction rationnelle sur X n'est rien qu'une application rationnelle de X dans $\mathbf{A}^1$.

3.5.8. Lemme. Soit $\theta_1, \ldots, \theta_m \in K(X)$. Alors $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ définit une application rationnelle de X dans Y si et seulement si pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$, $f(\theta_1, \ldots, \theta_m) = 0$ dans $K(X)$.

Démonstration. Soit U l'intersection des domaines de défintion des θ_i. Or θ définit une application rationnelle de X dans Y si et seulement si $\theta(x) = (\theta_1(x), \ldots, \theta_m(x)) \in Y$ pour tout $x \in U$ si et seulement si pour tous $x \in U$ et $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$,

$$0 = f(\theta(x)) = f(\theta_1(x), \ldots, \theta_m(x)) = (f(\theta_1, \ldots, \theta_m))(x)$$

si et seulement si $f(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ s'annule sur U, pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$ si et seulement si $f(\theta_1, \ldots, \theta_m) = 0$ pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$.

Supposons que X et Y sont tous irréductibles. Soit $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) : X \to Y$ une application rationnelle telle que $\theta(X)$ est dense dans Y. Soit $\phi \in K(Y)$. Alors ϕ s'écrit

$$\phi = \frac{f(t_1, \ldots, t_m)|_Y}{g(t_1, \ldots, t_m)|_Y}, \ \ g(t_1, \ldots, t_m)|_Y \neq 0.$$

Remarquons que $V = \{y \in Y \mid g(y) \neq 0\}$ est un ouvert non vide de Y. Donc $\theta(X)$ coupe V car $\theta(X)$ est dense dans Y. Donc $0 \neq g(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in K(X)$. Ainsi

$$\phi \circ \theta = \frac{f(\theta_1, \ldots, \theta_m)}{g(\theta_1, \ldots, \theta_m)}$$

est une fonction rationnelle sur X. Ainsi si $\phi \circ \theta$ est régulière en $x \in X$, alors $(\phi \circ \theta) = \phi(\theta(x))$.

Plus généralement, si $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p) : Y \to Z$ est une application rationnelle, alors la *composée* $\eta \circ \theta = (\eta_1 \circ \theta, \ldots, \eta_p \circ \theta)$ est une application rationnelle de X dans Z. Si si $\eta \circ \theta$ est régulière en $x \in X$, alors

$$(\eta \circ \theta) = \eta(\theta(x)) = (\eta_1(\theta(x)), \ldots, \eta_p(\theta(x))).$$

Il est évident que la composition d'applications rationnelles est associative.

3.5.9. Proposition. Supposons que X et Y sont tous irréductibles. Soient $\theta : X \to Y$ et $\eta : Y \to Z$ des applications rationnelles telles que $\theta(X)$ est dense dans Y et $\eta(Y)$ est dense dans Z.

(1) $\theta^* : K(Y) \to K(X) : \phi \mapsto \theta \circ \phi$ est un monomorphisme de K-algèbres.

(2) $(\eta \circ \theta)^* = \theta^* \circ \eta^*$.

Démonstration. (1) D'abord supposons que $\phi = f|_Y \in K[Y]$ avec $f \in K[t_1, \ldots, t_m]$. Posons $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ avec $\theta_i \in K(X)$. Alors $\phi \circ \theta = f(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in K(X)$. Soit U le domaine de définition de θ. Si $\phi \circ \theta = 0$, alors $\phi \circ \theta$ s'annule sur $\theta(X)$. Ainsi $\theta(X) \subseteq \mathcal{Z}_Y(\phi)$. Ce qui donne $Y = \mathcal{Z}_Y(\phi)$ car $\theta(X)$ est dense dans Y. Donc $\phi = 0$. Par conséquent,

$$\theta^* : K[Y] \to K(X) : \phi \mapsto \phi \circ \theta$$

est un monomorphisme de K-algèbres. Ce qui évidemmment s'étend en un monomorphisme de K-algèbre $\theta^* : K(Y) \to K(X)$.

(2) Pour tout $\phi \in K(X)$, $(\eta \circ \theta)^*(\phi) = \phi \circ \eta \circ \theta = \theta^*(\phi \circ \eta) = \theta^*(\eta^*(\phi)) = (\theta^* \circ \eta^*)(\phi)$. Ainsi $(\eta \circ \theta)^* = \theta^* \circ \eta^*$.

3.5.10. Définition. Supposons que X et Y sont tous irréductibles.

(1) Une application rationnelle $\theta : X \to Y$ est dite *birationnelle* s'il existe une application rationnelle $\eta : Y \to X$ avec $\eta(Y)$ dense dans X telle que $\eta\theta = \mathbb{1}_U$ et $\theta\eta = \mathbb{1}_V$, où U et V sont les domaines de définition de $\eta\theta$ et de $\theta\eta$ respectivement.

(2) On dit que X et Y sont *birationnels* s'il existe une application birationnelle $\theta : X \to Y$.

(3) On dit que X est *rationnel* si X est birationnel à un espace affine $\mathbf{A}^s$ avec $s \geq 1$.

Remarque. Une application birationnelle n'est pas nécessairement bijective.

Exemples: (1) Soit X l'hyperbole de $\mathbf{A}^2$ définie par léquation $t_1t_2 = 1$. La projection

$$p : X \to \mathbf{A}^1 : (a, b) \mapsto a$$

est birationnelle. Ainsi un hyperbole est une courbe rationnelle.

Démonstration. D'abord p est régulière et donc rationnelle. Or $q = (t, 1t) : \mathbf{A}^1 \to X$ est une application rationnelle. On a $q(\mathbf{A}^1) = X \backslash \{(0, 0)\}$. Ce qui est ouvert mais pas fermé car tout $\phi \in K[X] \cong K[t, t^{-1}]$ admet seulement un nombre fini de racines dans K. Donc $q(\mathbf{A}^1)$ est dense dans X. On voit aisément que $qp = \mathbb{1}$ et $pq = \mathbb{1}$ sur leurs domaines de définition.

(2) Soit X la courbe de $\mathbf{A}^2$ définie par l'équation $t_2^2 = t_1^3$. Alors

$$\phi : \mathbf{A}^1 \to X : a \mapsto (a^2, a^3)$$

est birationnelle.

Démonstration. D'abord ϕ est régulière et donc rationnelle. Or $\psi = t_2t_1 : X \to \mathbf{A}^1$ est une application rationnelle avec $\psi(X) = \mathbf{A}^1 \backslash \{0\}$ dense dans $\mathbf{A}^1$. On voit aisément que $\psi\phi = \mathbb{1}$ et $\phi\psi = \mathbb{1}$ sur leurs domaines de définition.

3.5.11. Lemme. Soit $\theta : X \to X$ une application rationnelle telle que $\theta^* = \mathbb{1}_{K(X)}$. Alors $\theta(x) = x$ lorsque θ est régulière en x.

Démonstration. Posons $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ et $\alpha_i = t_i|_X$, $i = 1, \ldots, n$. Alors $\alpha_i = \theta^*(\alpha_i) = \alpha_i \circ \theta = \theta_i$. Si θ est régulière en $x = (a_1, \ldots, a_n)$, alors $\theta(x) = (\theta_1(x), \ldots, \theta_n(x)) = (\alpha_1(x). \ldots, \alpha_n(x)) = x$.

3.5.12. Théorème. Soient X et Y sont tous irréductibles. Alors X et Y sont birationnelles si et seulement si $K(X) \cong K(Y)$.

Démonstration. Soient $\theta : X \to Y$ et $\eta : Y \to X$ des applications birationnelles telles que $\eta \circ \theta = 1\!\!1_U$ et $\theta \circ \eta = 1\!\!1_V$, où U et V sont les domaines de définition de $\eta \circ \theta$ et de $\theta \circ \eta$ respectivement. Or pour tout $\phi \in K(X)$, $(\theta^* \circ \eta^*)(\phi) = \phi \circ \eta \circ \theta$. Donc pour tout $x \in U$, $[(\theta^* \circ \eta^*)(\phi)](x) = \phi(x)$. Donc $(\theta^* \circ \eta^*)(\phi) = \phi$, pour tout $\phi \in K(X)$. Ce qui montre que $\theta^* \circ \eta^* = 1\!\!1_{K(X)}$. De même, $\eta^* \circ \theta^* = 1\!\!1_{K(Y)}$. Par conséquent, $K(X) \cong K(Y)$.

Supposons maintenant que $\Phi : K(Y) \to K(X)$ est un isomorphisme de K-algèbres et $\Psi = \Phi^{-1}$. Posons $\theta_i = \Phi(t_i|_Y) \in K(X)$, $i = 1, \ldots, m$. Pour tout $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{I}(Y)$, on a $f(t_1|_Y, \ldots, t_m|_Y) = 0$. Ainsi $f(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \Phi(f(\theta_1, \ldots, \theta_m)) = 0$. Donc $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) : X \to Y$ est une application rationnelle telle que $\theta^* = \Phi$. De même, posons $\eta_j = \Psi(t_j|_X)$. Alors $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) : Y \to X$ est une application rationnelle telle que $\eta^* = \Psi$. Donc $(\eta \circ \theta)^* = 1\!\!1_{K(X)}$ et $(\theta \circ \eta)^* = 1\!\!1_{K(Y)}$. Soient V les domaines de définition de $\eta \circ \theta$ et de $\theta \circ \eta$ respectivement. Alors $(\eta \circ \theta)(x) = x$ pour tout $x \in U$ et $(\theta \circ \eta)(y) = y$ pour tout $y \in V$. En particulier, $V \subseteq \theta(X)$. Si V_1 est un ouvert de Y, alors $V \cap V_1 \neq \emptyset$. Donc $\theta(X) \cap V_1 \neq \emptyset$. Ce qui montre que $\theta(X)$ est dense dans Y. De même, $\eta(Y)$ est dense dans X. Ce qui achève la démonstration.

3.5.13. Lemme. Soit $F \subset E$ une extension de corps algébrique avec F infini. Soit $\alpha \in E$ séparable sur F. Alors pour tout $\beta \in E$, $F(\alpha, \beta) = F(\gamma)$ pour un $\gamma \in E$.

Démonstration. Soit L une clôture algébrique de E. Soient $m_F^\alpha(t)$ et $m_F^\beta(t)$ les polynômes minimaux de α et de β, respectivement, sur F. Alors $m_F^\beta(t) = (t - \beta_1) \cdots (t - \beta_r)$, $\beta_i \in L$, $\beta_1 = \beta$ et

$$m_F^\alpha(t) = (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_s),\ \alpha_i \in L,\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_i \neq \alpha_j \text{ si } i \neq j.$$

Comme F est infini, il existe $a \in F$ tel que $a \neq \dfrac{\beta - \beta_i}{\alpha - \alpha_j}$ pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 < j \leq s$. Posons $\gamma = \beta - a\alpha$. Alors $F(\gamma) \subseteq F(\alpha, \beta)$.

Posons $g(t) = m_F^\beta(\delta + at)$, un polynôme sur $F(\gamma)$. Alors $g(\alpha) = m_F^\beta(\beta) = 0$. Ainsi $m_{F(\gamma)}^\alpha(t) \mid g(t)$, où $m_{F(\gamma)}^\alpha(t)$ est le polynôme minimal de α sur $F(\gamma)$. Or pour tout $1 < j \leq s$, $g(\alpha_j) = m_F^\beta(\gamma + a\alpha_j) \neq 0$ car $\gamma + a\alpha_j \neq \beta_i$ pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 < j \leq s$. Par conséquent $t - \alpha_j \not| \, g(t)$. En particulier, $t - \alpha_j \not| \, m_{F(\gamma)}^\alpha(t)$ pour tout $1 < j \leq s$. Mais

$$m_{F(\gamma)}^\alpha(t) \mid m_F^\alpha(t) = (t-\alpha)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_s).$$

Ce qui donne $m_{F(\gamma)}^\alpha(t) = t - \alpha$, c'est-à-dire, $\alpha \in F(\gamma)$. Ainsi $\beta = \gamma + a\alpha \in F(\gamma)$. Donc $F(\alpha, \beta) = F(\gamma)$.

3.5.14. Lemme. Soit $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$ irréductible. Alors $\dfrac{\partial f}{\partial t_i} = 0$ pour un $1 \leq i \leq n$.

D'emonstration. Supposons que $\dfrac{\partial f}{\partial t_i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors $\mathrm{char}(K) = p > 0$ et

$$f = \sum a_{r_1\cdots r_m} t_1^{pr_1} \cdots t_n^{pr_n}, \quad a_{r_1\cdots r_n} \in K.$$

Comme K est algébriquement clos, $a_{r_1\cdots r_n} = (b_{r_1\cdots r_n})^p$ avec $b_{r_1\cdots r_n} \in K$. Ce qui donne

$$f = \left(\sum b_{r_1\cdots r_n} t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}\right)^p,$$

ce qui contrdit que f est irréductible sur K.

3.5.15. Lemme. Soit $K \subset L$ une extension de corps dont le degré de transcendance est d. Si L peut être engendré par $d+1$ éléments, alors $L = K(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1})$, où $u_1, \ldots, u_d$ sont algébriquement indépendants sur K et $f(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}) = 0$ avec $f \in K[t_1, \ldots, t_{d+1}]$ irréductible et $\dfrac{\partial f}{\partial t_{d+1}} \neq 0$.

Démonstration. Soit $L = K(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1})$. On peut supposer que $\{u_1, \ldots, u_d\}$ est une base de transcendance de L sur K. Comme $v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}$ sont algébriquement dépendants sur K, il existe $f \in K[t_1, \ldots, t_{d+1}]$ irréductible tel que $f(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}) = 0$. Or $\dfrac{\partial f}{\partial t_i} \neq 0$ pour un $1 \leq i \leq d+1$. Donc u_i est algébrique sur $K(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{d+1})$. Comme le degré de transcendance de L sur K est d, on voit que $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{d+1}$ sont algébriquement indépendants sur K, et donc forment une base de transcendance de L sur K. Donc on peut supposer que $\dfrac{\partial f}{\partial t_{d+1}} \neq 0$.

3.5.16. Lemme. Soit $K \subset L$ une extension de corps de type fini dont le degré de transcendance est d. Alors $L = K(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1})$, où d .

Démonstration. Supposons que le lemme n'est pas vrai. Comme $K \subset L$ est une extension de type fini, il existe m minimal tel que $L = K(v_1, \ldots, v_m)$. Alors $m \geq d+2$. On peut supposer que $\{v_1, \ldots, v_d\}$ est une base de transcendance de L sur K. Remarquons que le degré de transcendance de $K(v_1, \ldots, v_d, v_{d+1})$ sur K est également d. Ainsi $K(v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}) = K(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1})$, où $u_1, \ldots, u_d$ sont algébriquement indépendants sur K et $f(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}) = 0$ avec $f \in K[t_1, \ldots, t_{d+1}]$ irréductible et $\dfrac{\partial f}{\partial t_{d+1}} \neq 0$. Comme f est irréductible sur K, on voit que $g(t) = f(u_1, \ldots, u_d, t)$ est un polynôme minimal de u_{d+1} sur $K(u_1, \ldots, u_d)$. Remarquons que $\dfrac{\partial g}{\partial t} \neq 0$. Ainsi u_{d+1} est séparable sur $K(u_1, \ldots, u_d)$. Donc

$$K(v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, v_{d+2}) = K(u_1, \ldots, u_d)(u_{d+1}, v_{d+2}) = K(u_1, \ldots, u_d)(v),$$

ce qui contredit la minimalité de m. Le résultat est donc prouvé.

3.5.17. Théorème. Tout ensemble algébrique irréductible est birationnel à une hypersurface irréductible.

Démonstration. Soit X un ensemble algébrique irréductible de $\mathbf{A}^n$. Alors $K \subseteq K(X)$ est une extension de type fini. Soit d le degré de transcendance de $K(X)$ sur K. Alors $K(X) = K(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1})$, où $u_1, \ldots, u_d$ sont algébriquement indépendants sur K et $f(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}) = 0$ avec $f \in K[t_1, \ldots, t_{d+1}]$ irréductible et $\dfrac{\partial f}{\partial t_{d+1}} \neq 0$. On sait que $g(t) = f(u_1, \ldots, u_d, t)$ est un polynôme minimal de u_{d+1} sur $K(u_1, \ldots, u_d)$.

Posons $Y = \mathcal{Z}(f) \subseteq \mathbf{A}^{d+1}$. Comme f est irréductible sur K, on a $\mathcal{I}(Y) = (f)$. Ainsi $K(Y) \cong K[t_1, \ldots, t_d, t_{d+1}]/(f)$. Posons $\bar{t}_i = t_i + (f)$, $i = 1, \ldots, d+1$. Si $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d$ sont algébriquement dépendants sur K, alors il existe $g \in K[s_1, \ldots, s_d]$ tel que $g(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d) = \bar{0}$, c'est-à-dire, $f(t_1, \ldots, t_d, t_{d+1}) \,|\, g(t_1, \ldots, t_d)$, ce qui est impossible car $\dfrac{\partial f}{\partial t_{d+1}} \neq 0$. Donc $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d$ sont algébriquement indépendants sur K. Comme f est irréductible sur K, $h(t) = f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d)$ est un polynôme minimal de $\bar{t}_{d+1}$ sur $K(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d)$. Or il existe un isomorphisme de corps

$$\Phi : K(u_1, \ldots, u_d) \to K(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d) : u_i \mapsto \bar{t}_i.$$

En particulier $\Phi(g(t)) = h(t)$. Donc $K(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1}) \cong (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d, \bar{t}_{d+1})$, c'est-à-dire, $K(X) \cong K(Y)$. Ainsi X et Y sont birationnels. Ce qui achève la démontration.

Chapitre IV: Espaces projectifs

4.1. Ensembles algébriques projectifs

Partout dans ce chapitre, on se fixe K un corps algébriquement clos. Pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$ non nul, on pose $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) = \{(\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \mid \lambda \in K^*\}$ et on appelle

$$\mathbf{P}^n = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \mid (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in K^{n+1} \text{ non nul}\}$$

l'*espace projectif* de dimension n. On voit que $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) = (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)$ si et seulement si il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(b_0, b_1, \ldots, b_n) = \lambda(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ se trouvent sur la même droite du K-espace vectoriel K^{n+1}. Donc les points de $\mathbf{P}^n$ correspondent biunivoquement aux droites du K-espace vectoriel A^{n+1}. Si $x \in \mathbf{P}^n$ et $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$, on appelle $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ un système de coordonnées homogènes de x. On voit aisément que l'application

$$\mathbf{A}^n \mapsto \mathbf{P}^n : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (1 : a_1 : \cdots : a_n)$$

est injectif. On appelle $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbf{P}^n$ un *point à l'infini* si $a_0 = 0$.

Exemples. (1) On appelle $\mathbf{P}^1$ la *droite projective.* On voit que $\mathbf{P}^1 = \{(1 : b) \mid b \in K\} \cup \{(0 : 1)\}$. Le point $(0 : 1)$ est le seul point à l'infini. On peut également obtenir $\mathbf{P}^1$ à partir du cercle unité du plan affine en identifiant (a, b) avec $(-a, -b)$.

(2) On appelle $\mathbf{P}^2$ le *plan projectif.* On voit que

$$\mathbf{P}^2 = \{(1 : b : c) \mid (b, c) \in \mathbf{A}^2\} \cup \{(0 : 1 : c) \mid c \in K\}\{(0 : 0 : 1)\}.$$

Les points à l'infini $\{(0 : b : c) \mid (b : c) \in \mathbf{P}^1\}$ forment une droite projective. On peut également obtenir $\mathbf{P}^2$ à partir de la sphère unitée de $\mathbf{A}^3$ en identifiant (a, b, c) avec $(-a, -b, -c)$.

On dit que $f \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ est *homogène* de degré $d \geq 0$ si

$$f(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{r_0 + r_1 + \cdots + r_n = d} a_{r_0 r_1 \cdots r_n} t_0^{r_0} t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}, \quad a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \in K.$$

Remarquons que tout $f \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ s'écrit $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_m$, où f_i est homogène nul ou de degré i. On appelle $f_0, f_1, \ldots, f_m$ les *composantes homogènes* de f. Un idéal I de $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ est dit *homogène* si pour tout $f \in I$, toutes les composantes homogènes de f appartinnent à I. Il est évident que l'intersection d'une famille quelconque d'idéaux homogènes est homogène.

4.1.1. Lemme. Un idéal I de $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ est homogène si et seulement si I est engendré par des polynômes homogènes.

Démonstration. Soit $I \trianglelefteq K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ homogène. Alors $I = (g_1, \ldots, g_r)$. Soient $g_{i0}, g_{i1}, \ldots, g_{id_i}$ les composantes homogènes de g_i. Comme I est homogène, $g_{ij} \in I,\ 1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq d_i$. Or il est évident que I est engendré par $g_{ij} \in I,\ 1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq d_i$.

Supposons maintenant que $I = (f_1, \ldots, f_s)$ avec les f_i homogènes. Si $f \in I$, alors $f = \sum_{i=1}^{s} f_i g_i,\ g_i \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$. Soient $g_{i0}, g_{i1}, \ldots, g_{id_i}$ les composantes homogènes de g_i. Alors $f = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{d_i} f_i g_{ij}$. Remarquons que $f_i g_{ij} \in I$ est homogène pour tous $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq d_i$. Ainsi les composantes homogènes de f appartiennent à I. Ce qui achève la démonstration.

Soit $x \in \mathbf{P}^n$. On dit que $f \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ *s'annule en* x si $f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$ lorsque $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) = x$.

4.1.2. Lemme. Soient $x \in \mathbf{P}^n$ et $f \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$.

(1) Si f est homogène, alors f s'annule en x si et seulement si $f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$ pour un système de coordonnées homogènes $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de x.

(2) f s'annule en x si et seulement si toutes les composantes homogènes de f s'annulent en x. En particulier, le terme constant de f est nécessairement nul.

Démonstration. (1) Supposons que f est homogène de degré d. Posons

$$f(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{r_0 + r_1 + \cdots + r_n = d} a_{r_0 r_1 \cdots r_n} t_0^{r_0} t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}, \quad a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \in K.$$

Si $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ et $\lambda \in K^*$, alors $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n)$. Ainsi $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ si et seulement si $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ pour tout $\lambda \in K^*$.

(2) Soit $f_0, f_1, \ldots, f_m$ les composantes homogènes de f. Supposons qu'il existe un r maximal avec $0 \leq r \leq m$ tel que f_r ne s'annule pas en x. Alors il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in$

K^{n+1} tel que $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ et $f_r(a_0, a_1, \cdots, a_n) \neq 0$. Posons $b_i = f_i(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in K$, $i = 1, \ldots, r$. Alors pour tout $\lambda \in K^*$, $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum_{i=0}^{r} b_i \lambda^i$. Comme K est infini, il existe $\lambda_0 \in K^*$ tel que

$$f(\lambda_0 a_0, \ldots, \lambda_0 a_n) = \sum_{i=0}^{r} b_i \lambda_0^i \neq 0.$$

Ainsi f ne s'annule pas en x.

4.1.3. Proposition. Soit $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Alors

$$\mathcal{I}_p(X) = \{f \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n] \mid f \text{ s'annule en } x \text{ pour tout } x \in X\}$$

est un idéal homogène radiciel de $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$.

Démonstration. Pour tout $x \in X$, on a vu que $\mathbf{I}_p(x)$ est un idéal homogène radiciel de $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$. Donc $\mathcal{I}_p(X) = \cap \{\mathcal{I}_p(x) \mid x \in X\}$ l'est aussi.

4.1.4. Définition. Soit Σ une famille de polynômes homogènes de $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$. On appelle

$$\mathbf{Z}_p(\Sigma) = \{x \in \mathbf{P}^n \mid \text{ tout } f \in \Sigma \text{ s'annule en } x\}$$

un *ensemble algébrique* de $\mathbf{P}^n$ défini par Σ.

Si $f \in K[t_0, \ldots, t_n]$ est homogène non nul, on appelle $\mathbf{Z}_p(f)$ *hypersurface* de $\mathbf{P}^n$.

Une *courbe projective* est une hypersurface de $\mathbf{P}^2$.

On appelle un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$ (respectivement, de $\mathbf{P}^n$) un *ensemble algébrique affine* (respectivement, *ensemble algébrique projectif*).

4.1.5. Proposition. Soit X une partie de $\mathbf{P}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) X est un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$.

(2) $X = \mathcal{Z}_p(f_1, \ldots, f_r)$ avec $f_1, \ldots, f_r \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ homogènes.

(3) $X = \mathcal{Z}_p(I)$ avec I un idéal homogène $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$.

Exemples. (1) Un point de $\mathbf{P}^n$ est un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$. En effet, Soit $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$. Alors $a_r \neq 0$ pour un $0 \leq r \leq n$. Or

$$\{x\} = \mathcal{Z}_p(a_r t_i - a_i t_r \mid 0 \leq i \leq n; i \neq r).$$

(2) Soit $X = \{(a : b : c) \in \mathbf{P}^2 \mid a^2 - bc = 0\}$. Alors

$$X = \{(1 : b : c) \mid bc = 1\} \cup \{(0 : 1 : 0)\} \cup \{(0 : 0 : 1)\}.$$

Ainsi X se compose d'une l'hyperbole $C = \{(1 : b : c) \mid bc = 1\}$ et deux points à l'infini $(0 : 1 : 0)$ et $(0 : 0 : 1)$ qui correspondent aux directions asymptotiques de C.

(3) Soient $a, b, c \in K$ non tous nuls. On appelle $X = \mathcal{Z}_p(at_0 + bt_1 + ct_2) \subseteq \mathbf{P}^2$ une droite projective. Alors

$$X = \{(1 : x : y) \in \mathbf{P}^2 \mid bx + cy + a = 0\} \cup \{(0 : \lambda : \mu) \in \mathbf{P}^2 \mid a_1\lambda + a_2\mu = 0\}.$$

Si $b = c = 0$, alors $X = \{(0 : \lambda : \mu) \in \mathbf{P}^2\}$. Si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, alors $\{(1 : x : y) \in \mathbf{P}^2 \mid bx + cy + a = 0\}$ correspond à la droite affine définie par l'équation $bx + cy + a = 0$ et $\{(0 : \lambda : \mu) \in \mathbf{P}^2 \mid a_1\lambda + a_2\mu = 0\}$ contient un seul point, ce qui est $(0 : -c : b)$ ou $(0 : b : -c)$. En outre si $Y = \mathcal{Z}_p(a't_0 + b't_1 + c't_2)$ une autre droite projective, alors X et Y se coupent toujours. En effet on peut supposer que (a, b, c) et (a', b', c') sont linéairment indépendants. Si $bc' - b'c \neq 0$, alors les droites affines définies par $bx + cy + a = 0$ et par $b'x + c'y + a' = 0$ respectivement se coupent. Sinon, X et Y se coupent à l'infini.

4.1.6. Lemme. Soient X, Y des parties de $\mathbf{P}^n$ et I, J des idéaux homogènes de $K[t_0, t_1, \dots, t_n]$.

(1) Si $X \subseteq Y$, alors $\mathcal{I}_p(Y) \subseteq \mathcal{I}_p(X)$.

(2) Si $I \subseteq J$, alors $\mathcal{Z}_p(J) \subseteq \mathcal{Z}_p(I)$.

(3) L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles algébriques de $\mathbf{P}^n$ est un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$.

(4) La réunion d'une famille finie d'ensembles algébriques de $\mathbf{P}^n$ est un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$.

4.1.7. Théorème. Pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}^n$ est un espace topologique ayant pour ensembles fermés les ensembles algébriques de $\mathbf{P}^n$. Cette topologie s'appelle *topologie de Zariski* de $\mathbf{P}^n$.

4.1.8. Nullstellensatz projectif. Soit I un idéal homogène de $K[t_0, t_1, \dots, t_n]$.

(1) $\mathcal{Z}_p(I) = \emptyset$ si et seulement si $(t_0, t_1, \dots, t_n)^m \subseteq I$ pour un m si et seulement si $(t_0, t_1, \dots, t_n) \subseteq \sqrt{I}$.

(2) Si $(t_0, t_1, \ldots, t_n) \not\subseteq \sqrt{I}$, alors $\mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(I)) = \sqrt{I}$.

Démonstration. D'abord, $I = (f_1, \ldots, f_r)$ avec $f_1, \ldots, f_r$ homogènes.

(1) Supposons que $\mathcal{Z}_p(I)$ contient un point $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbf{P}^n$. Alors $a_r \neq 0$ pour un $0 \leq r \leq n$. Ainsi pour tout $m \geq 1$, t_r^m ne s'annule pas en x. Ainsi $(t_0, t_1, \ldots, t_n)^m \not\subseteq I$ pour tout $m \geq 1$.

Supposons maintenant que $(t_0, t_1, \ldots, t_n)^m \not\subseteq I$ pour tout $m \geq 1$. Alors $I \neq (1)$. D'après Nullstellensatz, $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$ et $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$. Supposons que $\mathcal{Z}(I) = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. Alors $\sqrt{I} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Ainsi il existe $s \geq 1$ tel que $t_i^s \in I$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Ce qui donne $(t_0, t_1, \ldots, t_n)^{sn} \subseteq I$, une contrediction. Donc il existe $y = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^{n+1}$ non nul tel que $f_i(y) = 0$, $i = 1, \ldots, r$. Donc $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbf{P}^n$ tel que $f_1, \ldots, f_r$ s'annulent en x, c'est-à-dire, $\mathcal{Z}_p(I) \neq \emptyset$.

(2) Supposons que $(t_0, t_1, \ldots, t_n) \not\subseteq \sqrt{I}$. Alors $\mathcal{Z}_p(I) \neq \emptyset$. Soit $f \in \mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(I))$. Alors $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Soit $y = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$. Si $y = (0, 0, \ldots, 0)$, alors $f(y) = 0$. Si $y \neq (0, 0, \ldots, 0)$, alors $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbf{P}^n$ tel que $f_i(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$, et donc f_i s'annule en x car f_i est homogène, $i = 1, \ldots, r$. Donc $x \in \mathcal{Z}_p(I)$. En particulier, $f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$. Donc $f \in \sqrt{I}$ d'après Nullstellensatz. Ce qui donne $\mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(I))$. Mais il est évident que $\sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(I))$. Donc $\mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(I)) = \sqrt{I}$.

4.1.9. Corollaire. Les ensembles algébriques non vides de $\mathbf{P}^n$ correspondent biunivoquement aux idéaux homogènes radiciels de $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ qui ne contiennent pas $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Les idéaux homogènes premiers correspondent aux ensembles algébriques irréductibles non vides.

Démonstration. Soit $I \trianglelefteq K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ homogène radiciel avec $(t_0, t_1, \ldots, t_n) \not\subseteq I$. Alors $\mathcal{Z}_p(I)$ est non vide tel que $\mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(I)) = \sqrt{I} = I$. D'autre part, soit $X = \mathcal{Z}_p(I)$ un ensemble algébrique non vide de $\mathbf{P}^n$, où I est un idéal homogène de $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ tel que $(t_0, t_1, \ldots, t_n) \not\subseteq \sqrt{I}$. Or $\sqrt{I} = \mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(I))$ est homogène radiciel tel que $\mathcal{Z}_p(\sqrt{I}) = \mathcal{Z}_p(I) = X$. De plus $\mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(X)) = \mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(\sqrt{I}))) = \mathcal{Z}_p(\sqrt{I}) = X$.

Remarques. (1) $\mathbf{P}^n$ est irréductible.

(2) Les points de $\mathbf{P}^n$ ne correspondent pas aux idéaux homogènes maximaux.

4.1.10. Définition. Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$. On appelle

$$C(X) = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^{n+1} \mid (a_0, a_1, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0) \text{ ou } (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in X\}$$

la *cône* de X.

Exemples. (1) $C(\emptyset) = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$.

(2) Si $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbf{P}^n$, alors $C(x)$ est la droite de $\mathbf{A}^{n+1}$ passant par $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

4.1.11. Proposition. Soit $X = \mathcal{Z}_p(I)$ avec $I \lhd K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ homogène radiciel.

(1) Si $I \neq K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$, alors $C(X) = \mathcal{Z}(I)$. Ainsi $C(X)$ est toujours un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^{n+1}$.

(2) $C(X)$ est irréductible si et seulement si X est irréductible.

Démonstration. (1) Si $X = \emptyset$, alors $I = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Ainsi $\mathcal{Z}(I) = \{(0, 0, \ldots, 0)\} = C(X)$. Supposons maintenant que $X \neq \emptyset$. Posons $I = (f_1, \ldots, f_r)$ avec $f_1, \ldots, f_r$ homogènes. Remarquons que le terme constant de f_i est nul pour tout $1 \leq i \leq r$. Ainsi $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{Z}(I) \cap C(X)$. Or pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^{n+1}$ non nul, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$ si et seulement si $f_i(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$ si et seulement si f_i s'annule en $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ si et seulement si $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathcal{Z}_p(I)$ si et seulement si $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in C(X)$.

(2) Si $X = \emptyset$, alors $C(X) = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ est irréductible. Supposons que $X \neq \emptyset$. Alors X est irréductible si et seulement si I est irréductible si et seulement si $\mathcal{Z}(I) = C(X)$ est irréductible.

4.2. La grassmanienne

On se fixe E un K-espace vectoriel. Pour $r \geq 1$, considérons

$$T^r(E) = \overbrace{E \otimes_K \cdots \otimes_K E}^{r \text{ fois}}$$

et le sous-espace vectoriel $S^r(E)$ engendré par $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r$ avec $u_1, \ldots, u_r$ non distincts. On appelle

$$\wedge^r(E) = T^r(E)/S^r(E)$$

la r-ième *puissance extérieure* de E. Si $u_1, \ldots, u_r \in E$, on note

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = u_1 \otimes \cdots \otimes u_r + S^r(E) \in \wedge^r(E).$$

Ainsi $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = 0$ si $u_1, \ldots, u_r$ ne sont pas distincts.

On voit que $\wedge^1(E) = E$ et on définit $\wedge^0(E) = K$. Si $a \in \wedge^0(E)$ et $w \in \wedge^r(W)$, on définit $a \wedge w = w \wedge a = aw$. En outre suppsons que $w = u + S^r(E) \in \wedge^r(E)$ avec $u \in T^r(E)$ et $w' = v + S^s(E) \in \wedge^s(E)$ avec $v \in T^s(E)$, on définit

$$w \wedge w' = u \otimes v + S^{r+s}(E) \in \wedge^{r+s}(E).$$

4.2.1. Lemme. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq E$ et σ une n-permutation. Alors

$$u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n).$$

Démonstration. Si $\sigma = (rs)$ avec $r < s$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= u_1 \wedge \cdots \wedge (u_r + u_s) \wedge \cdots \wedge (u_s + u_r) \wedge \cdots \wedge u_n \\ &= u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge \cdots \wedge u_s \wedge \cdots \wedge u_n + u_1 \wedge \cdots \wedge u_s \wedge \cdots \wedge u_r \wedge \cdots \wedge u_n. \end{aligned}$$

Ainsi $u_1 \wedge \cdots \wedge u_s \wedge \cdots \wedge u_r \wedge \cdots \wedge u_n = -(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge \cdots \wedge u_s \wedge \cdots \wedge u_n)$. Donc le lemme est vrai dans ce cas. Supposons $m > 1$ et le résultat est vrai si σ est un produit de $m-1$ transpositions. Supposons que $\sigma = \tau(rs)$ avec $r < s$ et τ est un produit de $m-1$ transpositions. Alors

$$\begin{aligned} u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(n)} &= u_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(s)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(r)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(n)} \\ &= -(u_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(r)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(s)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(n)} \\ &= (-\operatorname{sgn}(\tau))(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) = \operatorname{sgn}(\sigma)\,(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n). \end{aligned}$$

4.2.2. Lemme. Soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ et $\{v_1, \ldots, v_r\}$ des familles de vecteurs de E. Supposons que $(v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n)A$ avec A une matrice carrée d'ordre r sur K. Alors

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det(A)\,(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r).$$

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{r \times r}$. Alors $v_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} u_i,\ \ j = 1, \ldots, r$. Donc

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = \sum_{i_1=1}^r \cdots \sum_{i_r=1}^r a_{i_1,1} \cdots a_{i_r,r}\,(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}).$$

Remarquons que $i_1, \ldots, i_r$ sont deux à deux distincts si et seulement si il existe $\sigma \in S_r$ tel que $i_j = \sigma(j),\ j = 1, \ldots, r$. Et si $i_1, \ldots, i_n$ ne sont pas deux à deux distincts, alors $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r} = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_r &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_r} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(r),r} \, (u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}) \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_r} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(r),r} \, \mathrm{sgn}(\sigma) \, (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) \\ &= (\textstyle\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(r),r}) \, (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) \\ &= \det(A)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r). \end{aligned}$$

4.2.3. Théorème. Soit E de K-dimension n et soit $r \leq n$.

(1) La K-dimension de $\wedge^r(E)$ est $\binom{n}{r}$.

(2) Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une K-base de E, alors $\{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ est une K-base de $\wedge^r(E)$.

Démonstration. (1) On pose $\Pi = \{(j_1, \ldots, j_r) \mid 1 \leq j_i \leq n\}$, $\Omega = \{(j_1, \ldots, j_r) \in \Pi \mid j_1, \ldots, j_r \quad \text{non distincts}\}$, $\Delta = \{(j_1, \ldots, j_r) \in \Pi \mid j_1, \ldots, j_r \quad \text{distincts}\}$ et $\Theta = \{(i_1, \ldots, i_r) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$. On a $\Delta = \cup \{(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}) \mid (i_1, \ldots, i_r) \in \Theta.\}$

Remarquons que $|\Pi| = n^r$, $|\Theta| = \binom{n}{r}$, $\Delta = r!\binom{n}{r}$ et donc $|\Omega| = n^r - r!\binom{n}{r}$.

Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E. Alors $\{u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_r} \mid (j_1, \ldots, j_r) \in \Pi\}$ est une base de $T^r(E)$. Donc $\dim_K T^r(E) = n^r$. Comme $\dim_K \wedge^r(E) = \dim_K T^r(E) - \dim_K S^r(E)$, il suffit de montrer que $\dim_K S^r(E) = n^r - (r! - 1)\binom{n}{r}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que la réunion $\mathcal{B}$ de $\{u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_r} \mid (j_1, \ldots, j_r) \in \Omega\}$ et

$$\{u_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{i_{\sigma(r)}} - \mathrm{sgn}\,(\sigma) \, u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r} \mid (i_1, \ldots, i_r) \in \Theta,\ 1 \neq \sigma \in S_r\}$$

est une base de $S^r(E)$. D'abord, $\mathcal{B} \subseteq S^r(E)$ est libre car $\{u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_r} \mid (j_1, \ldots, j_r) \in \Pi\}$ est libre. Il reste de montrer que $S^r(E)$ est engendré par $\mathcal{B}$.

Soient $v_1, \ldots, v_r \in E$ non distincts. Posons $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j,\ i = 1, \ldots, r$. Alors la matrice $(a_{ij})_{r \times n}$ admet deux lignes identiques. Donc tout mineur d'ordre r de cette matrice est nul. Or

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r = \sum_{(j_1, \ldots, j_r) \in \Omega} a_{1j_1} \cdots a_{rj_r} \, (u_{j_1} \otimes \cdots u_{j_r}) + \sum_{(j_1, \ldots, j_r) \in \Delta} a_{1j_1} \cdots a_{rj_r} \, (u_{j_1} \otimes \cdots u_{j_r}).$$

Donc il suffit de montrer que la deuxième somme est une combinaison linéaire de vecturs de $\mathcal{B}$. En effet,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{(j_1,\ldots,j_r)\in\Delta} a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}\left(u_{j_1}\otimes\cdots u_{j_r}\right) \\
= & \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Theta}\sum_{\sigma\in S_r} a_{1i_{\sigma(1)}}\cdots a_{ri_{\sigma(r)}}\left(u_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes u_{i_{\sigma(r)}}\right) \\
= & \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Theta}\sum_{\sigma\in S_r} a_{1i_{\sigma(1)}}\cdots a_{ri_{\sigma(r)}}\left(u_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes u_{i_{\sigma(r)}} - \operatorname{sgn}(\sigma)\, u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_r}\right) \\
& + \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Theta}\left(\sum_{\sigma\in S_r}\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1i_{\sigma(1)}}\cdots a_{ri_{\sigma(r)}}\right)\left(u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_r}\right) \\
= & \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Theta}\sum_{\sigma\in S_r} a_{1i_{\sigma(1)}}\cdots a_{ri_{\sigma(r)}}\left(u_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes u_{i_{\sigma(r)}} - \operatorname{sgn}(\sigma)\, u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_r}\right) \\
& + \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Theta} \det\left((a_{ii_j})_{r\times r}\right)\left(u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_r}\right) \\
= & \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Theta}\sum_{\sigma\in S_r} a_{1i_{\sigma(1)}}\cdots a_{ri_{\sigma(r)}}\left(u_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes u_{i_{\sigma(r)}} - \operatorname{sgn}(\sigma)\, u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_r}\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $S^r(E)$.

(2) La famille $\{u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_r} \mid 1\le i_1<\cdots<i_r\le n\}$ engendre $\wedge^r(E)$ et donc une base car $\dim_K \wedge^r(E) = \binom{n}{r}$.

4.2.4. Corollaire. Soit $\{v_1,\ldots,v_r\}\subseteq E$. Alors $v_1\wedge\cdots\wedge v_r = 0$ si et seulement si $\{v_1,\ldots,v_r\}$ est liée.

Démonstration. Si $\{v_1,\ldots,v_r\}$ est liée, on voit aisément que $v_1\wedge\cdots\wedge v_r = 0$. Sinon, $\{v_1,\ldots,v_r\}$ se prolonge en une base $\{u_1,\ldots,u_r,u_{r+1},\ldots,u_n\}$ de E. Ainsi $u_1\wedge\cdots\wedge v_r$ appartient à la base $\{u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_r} \mid 1\le i_1<\cdots<i_r\le n\}$ de $\wedge^r(E)$, est donct non nul.

On dit qu'un vecteur $w\in\wedge^r(E)$ est *décomposable* si $w = v_1\wedge\cdots\wedge v_r$ avec $v_1,\ldots,v_r\in E$. On voit ais]'ement que si w est décomposable, alors aw l'est pour tout $a\in K^*$.

4.2.5. Lemme. Soient $w\in\wedge^r(E)$ non nul et $\{v_1,\ldots,v_s\}\subseteq E$ libre. Si $v_i\wedge w = 0$ pour tout $1\le i\le s$, alors $s\le r$ et $w = v_1\wedge\cdots\wedge v_s\wedge w_1$ avec $w_1\in\wedge^{r-s}(E)$.

Démonstration. La famille $\{v_1,\ldots,v_r\}$ se prolonge en une base $\{v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n\}$ de E. Ainsi $\{v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_r} \mid 1\le i_1<\cdots<i_r\le n\}$ est une base de $\wedge^r(E)$. Or il existe un

ensemble non vide Λ de r-tuples $(i_1, \ldots, i_r)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ tel que

$$w = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Lambda} a_{i_1\cdots i_r}\,(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}), \quad a_{i_1\cdots i_r} \in K^*.$$

On prétend que pour tout $(i_1, \ldots, i_r) \in \Lambda,\ \ i_j = j$ si $1 \leq j \leq$min$\{r, s\}$. Supposons d'abord que $\Lambda_1 = \{(i_1, \ldots, i_r) \in \Lambda \mid 1 < i_1\}$ est non vide. Alors

$$v_1 \wedge w = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Lambda_1} a_{i_1\cdots i_r}\,(v_1 \wedge v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}) = 0,$$

ce qui contredit que $\{v_1 \wedge v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} \mid 1 < i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ est libre dans $\wedge^{r+1}(E)$. Donc $i_1 = 1$ pour tout $(i_1, \ldots, i_r) \in \Lambda$. Supposons que $1 \leq j <$min$\{r, s\}$ et l'énoncé est vrai pour j. Supposons que $\Lambda_{j+1} = \{(i_1, \ldots, i_r) \in \Lambda \mid j+1 < i_{j+1}\}$ est non vide. Alors

$$v_{j+1} \wedge w = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Lambda_{j+1}} (-1)^j a_{i_1\cdots i_r}\,(v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge v_{j+1} \wedge v_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}) = 0,$$

ce qui contredit que $\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge v_{j+1} \wedge v_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} \mid j < i_{j+1} < \cdots < i_r \leq n\}$ est libre dans $\wedge^{r+1}(E)$. Ainsi l'énoncé est vrai.

Si $s \geq r$, alors $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge a$ avec $a = a_{1\cdots r} \in K = \wedge^0(E)$ Supposons que $s > r$, alors $v_{r+1} \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0$ car $a \neq 0$. Ce qui contredit que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ est libre. Donc $s \leq r$. Si $r < s$, alors $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_s \wedge w_1$ avec

$$w_1 = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in\Lambda} a_{i_1\cdots i_r}(v_{i_{s+1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}) \quad \in \wedge^{r-s}(E).$$

Ce qui achève la démonstration.

4.2.6. Proposition. Soit $w \in \wedge^r(E)$ non nul. Alors

$$w^\perp = \{u \in E \mid u \wedge w = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension $\leq r$. Et $\dim_K w^\perp = r$ si et seulement si $w \in \wedge^r(E)$.

Démonstration. On voit aisément que $w^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $\{v_1, \ldots, v_s\}$ une base de $w^\perp$. D'après le lemme précédent, $s \leq r$.

Si $s = r$, alors $w = (av_1) \wedge \cdots \wedge v_s$ avec $a \in K^*$ est décomposable.

Si w est décomposable, alors $w = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ avec $u_1, \ldots, u_r$ linéairement indépendants. Or $u_i \in w^\perp,\ i = 1, \ldots, r$. Ainsi $s \geq r$. Ce qui donne $s = r$. Le résultat est donc prouvé.

Soient $n > r \geq 1$ et $N = \binom{n}{r}$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique du K-espace vectoriel K^n. On appelle $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ la *base canonique* de $\wedge^r(K^n)$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension r de K^n. On prend une base $u_1, \ldots, u_r$ de F. Alors

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} p_{i_1 \cdots i_r}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}), \quad a_{i_1 \cdots i_r} \in K.$$

Remarquons que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$. Ainsi $(a_{i_1 \cdots i_r} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n)$ est un vecteur non nul de $\mathbf{A}^N$ et donc détermine un point $p(u_1, \ldots, u_r)$ de $\mathbf{P}^{N-1}$. Or si $v_1, \ldots, v_r$ est une autre base de F, alors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = a(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)$, où $a \in K^*$ est le déterminant de la matrice de passage. Ainsi $p(v_1, \ldots, v_r) = p(u_1, \ldots, u_r)$. Ainsi le point $p(u_1, \ldots, u_r)$ est uniquement déterminé par F et noté $p(F)$. On appelle $\{p_{i_1 \cdots i_r} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$ un système des *coordonnées de Plüker* de F.

4.2.7. Proposition. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de dimension r de K^n.

(1) Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base de F, alors $F = (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)^{\perp}$.

(2) $F = G$ si et seulement si $p(G) = p(F)$.

Démonstration. (1) Soit $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ de K^n telle que $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base F. D'abord $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge u_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Ainsi $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge u = 0$ pour tout $u \in F$. D'autre part, $\{u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge u_i \mid r < i \leq n\}$ est une famille libre. Supposons que $u = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ est tel que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge u = 0$. Alors $\sum_{i=r+1}^n a_i(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge u_i) = 0$. Ce qui donne $a_i = 0$ pour tout $r < i \leq n$. Donc $u \in F$.

(2) Supposons que $p(G) = p(F)$. Prenons $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une base de G. Alors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = a(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)$ avec $a \in K^*$. Par conséquent $F = (u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)^{\perp} = (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)^{\perp} = G$.

4.2.8. Lemme. Soient $1 \leq r < n$ et $N = \binom{n}{r}$. Soient $w \in \wedge^r(E)$ non nul et $p(w) \in P^{N-1}$ déterminé par les coordonnées de w dans la base canonique de $\wedge^r(K^n)$. Alors $p(w) \in$Grass$\,(r, n)$ si et seulement si w est décomposable.

Démonstration. Si $p(w) \in$Grass$\,(r, n)$, alors $p(w) = P(F)$ avec F un sous-espace vectoriel de dimension r de K^n. Soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une base de F. Alors les coordonnées de $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ dans la base canonique de $\wedge^r(K^n)$ forment un système de coordonnées homogènes de $p(w)$. Ainsi $w = a(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)$ avec $a \in K^*$ est décomposable.

Si w est décomposable, alors $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$. Alors $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairment indépendants et donc engendrent un sous-espace vectoriel F de dimension r. Or $p(w) = p(F) \in \text{Grass}\,(r, n)$.

Rappelons que si A est une matrice sur K, alors $\text{rg}(A) = r$ si et seulement si A admet un mineur non nul d'ordre r et tous les mineurs d'ordre $r+1$ de A sont nuls. Ainsi $\text{rg}(A) \leq r$ si et seulement si tous les mineurs d'ordre $r+1$ sont nuls. En outre si $B = (f_{ij})_{n\times n}$ avec f_{ij} polynômes homogènes de même degré (peut-être nul), alors

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)} f_{2\sigma(2)} \cdots f_{n\sigma(n)}$$

est un polynôme homogène.

4.2.9. Théorème. Soient $1 \leq r < n$ et $N = \binom{n}{r}$. Alors ggrass(r, n) est un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^{N-1}$, appelé *grassmanienne* sur K d'indices r, n.

Démonstration. Soit $p \in \mathbf{P}^{N-1}$. On se fixe $(x_{i_1\cdots i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$ un système des coordonnées homogènes de p. Alors

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1\cdots i_r} \left(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\right)$$

est un vecteur non nul de $\wedge^r(K^n)$ tel que $p = p(w)$. Considérons l'application linéaire

$$T : K^n \to \wedge^{r+1}(K^n) : u \mapsto u \wedge w.$$

On a $\text{Ker}(T) = w^\perp$. Soit $[T]$ la matrice de T dans la base canonique de K^n et celle-ci de $\wedge^{r+1}(K^n)$. On voit aisément que chaque terme de $[T]$ est de la forme $\varepsilon x_{i_1\cdots i_r}$ avec $\varepsilon \in \{0, 1, -1\}$ et $1 \leq i_1 < \cdots i_r \leq n$. Ainsi les mineurs de $[T]$ sont tous polynômes homogènes de $x_{i_1\cdots i_r}$. Remarquons que $\text{rg}[T] = \dim_k(K^n) - \dim_K(w^\perp) \geq n - r$.

Or $p \in \text{grass}\,(r, n)$ si et seulement si w est décomposable si et seulement si $\dim_K(w^\perp) = r$ si et seulement si $\text{rg}[T] = r$ si et seulement si $\text{rg}[T] \leq r$ si et seulement si les mineurs d'ordre $r+1$ de $[T]$ sont tous nuls. Ce qui montre que grass$\,(r, n)$ est un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^{N-1}$ défini par les les mineurs d'ordre $r+1$ de $[T]$.

Remarque. On mentionne sans preuve le fait que grass$\,(r, n)$ est irréductible.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{A}_i^n = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbf{P}^n \mid a_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbf{P}^n$. Or

$$\pi_i : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}_i^n : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_i : \cdots : a_n)$$

est bijective ayant pour inverse

$$\varepsilon_i : \mathbf{A}_i^n \to \mathbf{A}^n : (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \mapsto (\frac{a_0}{a_i}, \cdots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \cdots, \frac{a_n}{a_i}).$$

On appelle $\mathbf{A}_i^n$ un *morceau affine* de $\mathbf{P}^n$. On a $\mathbf{P}^n = \mathbf{A}_0^n \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n^n$.

Par abus de langage, on dit que le polynôme nul est de degré d pour tout $d \geq 0$.

4.3.1. Lemme. (1) Si $f(t_1, \ldots, t_n) \in K[t_1, \ldots, t_n]$ est de degré d, alors

$$f^\sharp(t_0, t_1, \ldots, t_n) = t_0^d f(\frac{t_1}{t_0}, \cdots, \frac{t_n}{t_0}) \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$$

est homogène de degré d.

(2) Si $g(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ est homogène, alors $g_\flat(t_1, \ldots, t_n) = g(1, t_1, \ldots, t_n) \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Et $\deg(g_\flat) = \deg(g)$ si et seulement si $t_0 \not| g$. Dans ce cas, $(g_\flat)^\sharp = g$.

(3) Pour tout $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$, $(f^\sharp)_\flat = f$.

Démonstration. (1) Soit $f(t_1, \ldots, t_n) = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$, où $f_i \in K[t_1, \ldots, t_n]$ est homogène nul ou de degré i. Ainsi

$$t_0^d f_i(\frac{t_1}{t_0}, \cdots, \frac{t_n}{t_0}) \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$$

est homogène nul ou de degré d. Ainsi

$$f^\sharp(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=0}^{d} t_0^d f_i(\frac{t_1}{t_0}, \cdots, \frac{t_n}{t_0})$$

est homogène de degré d.

(2) Il existe une famille finie $\Omega = \{(r_0, r_1, r_n) \mid r_0 + r_1 + \cdots + r_n = d\}$ telle que

$$g(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{(r_0, r_1, r_n) \in \Omega} a_{r_0 r_1 \cdots r_n}\, t_0^{r_0} t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n},\ a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \in K^*.$$

Alors

$$g_\flat(t_1,\dots,t_n)=g(1,t_1,\dots,t_n)=\sum_{(r_0,r_1,r_n)\in\Omega} a_{r_0r_1\cdots r_n}\, t_1^{r_1}\cdots t_n^{r_n}.$$

Ainsi deg($g_\flat$) =deg(g) si et seulement si il existe $(r_0,r_1,\cdots,r_n)\in\Omega$ tel que $r_0=0$ si et seulement si $t_0 \not| g$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f^\sharp(t_0,t_1,\dots,t_n) &= \textstyle\sum_{(r_0,r_1,r_n)\in\Omega} a_{r_0r_1\cdots r_n}\, t_0^d\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{r_1}\cdots\left(\frac{t_n}{t_0}\right)^{r_n}\\ &= \textstyle\sum_{(r_0,r_1,r_n)\in\Omega} a_{r_0r_1\cdots r_n}\, t_0^{r_0}t_1^{r_1}\cdots t_n^{r_n}\\ &= g(t_0,t_1,\dots,t_n). \end{aligned}$$

4.3.2. Proposition. (1) Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$ défini par $f_1,\dots,f_r\in K[t_1,\dots,t_n]$. Alors $\pi_0(X)=\mathbf{A}_0^n\cap\mathcal{Z}_p(f_1^\sharp,\dots,f_r^\sharp)$.

(2) Soit Y un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$ défini par $g_1,\dots,g_s\in K[t_0,t_1,\dots,t_n]$. Alors $\mathbf{A}_0^n\cap Y=\pi_0(\mathcal{Z}((g_1)_\flat,\dots,(g_s)_\flat))$.

Démonstration. (1) Si $f_i(a_1,\dots,a_n)=0$ pour tout $1\le i\le r$, alors

$$f_i^\sharp(1,a_1,\dots,a_n)=f_i(a_1,\dots,a_n)=0.$$

Ainsi $\pi_0(X)=\mathbf{A}_0^n\cap\mathcal{Z}_p(f_1^\sharp,\dots,f_r^\sharp)$. Si $x=(a_0:a_1:\cdots:a_n)\in\mathbf{A}_0^n\cap\mathcal{Z}_p(f_1^\sharp,\dots,f_r^\sharp)$, alors $a_0\neq 0$ et donc $x=(1:\frac{a_1}{a_0}:\cdots:\frac{a_n}{a_0})$. Or pour tout $1\le i\le r$,

$$0=f_i^\sharp(1,\frac{a_1}{a_0},\dots,\frac{a_n}{a_0})=f_i(\frac{a_1}{a_0},\dots,\frac{a_n}{a_0}).$$

Ainsi $x=\pi_0(\frac{a_1}{a_0},\dots,\frac{a_n}{a_0})\in\pi_0(X)$.

(2) Si $x=(a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{Z}((g_1)_\flat,\dots,(g_s)_\flat)$, alors $g_i(1,a_1,\dots,a_n)=0$ pour tout $1\le i\le s$. Ainsi $\pi_0(x)\in\mathbf{A}_0^n\cap Y$. Réciproquement si $y=(a_0:a_1:\cdots:a_n)\in\mathbf{A}_0^n\cap Y$, alors $y=(1:\frac{a_1}{a_0}:\cdots:\frac{a_n}{a_0})$ et $g_i(1,\frac{a_1}{a_0},\dots,\frac{a_n}{a_0})=0$ pour tout $1\le i\le s$. Ainsi $x=(\frac{a_1}{a_0},\dots,\frac{a_n}{a_0})\in\mathcal{Z}((g_1)_\flat,\dots,(g_s)_\flat)$ tel que $y=\pi_0(x)$.

4.3.3. Corollaire. (1) Pour tout $0\le i\le n$, $\pi_i:\mathbf{A}^n\to\mathbf{A}_i^n$ est un homéomorphisme par rapport à la topologie de Zariski.

(2) Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$. Alors $X_i=\mathbf{A}_i^n\cap X$, $i=0,\dots,n$, sont ouverts de X tels que

$$X=X_0\cup X_1\cup\cdots\cup X_n.$$

On voit que X_i est homéomorphique à $\pi_i^{-1}(X)$ qui est un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. On appelle ainsi X_i un *morceau affine* de X.

4.3.4. Définition. Une *variété quasi-projective* est un ouvert d'un ensemble algébrique projective ou un ouvert d'un ensemble algébrique affine.

Remarque. Soit $X \subseteq \mathbf{A}^n$. Alors X est une variété quasi-projective si et seulement si $\pi_i(X)$ une variété quasi-projective pour un $0 \le i \le n$ si et seulement si $\pi_i(X)$ une variété quasi-projective pour tout $0 \le i \le n$.

Exemples. $\mathrm{GL}(n, K)$ et $\mathrm{grass}(r, n)$ sont variétés quasi-projectives.

Soit X et Y des variétés quasi-projectives. On appelle Y une *sous-variété* de X si $Y \subseteq X$.

4.3.5. Proposition. Soit X une variété quasi-projective. Si Y est un ouvert ou fermé de X, alors Y est une sous-variété de X.

Démonstration. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Alors X est un ouvert d'un ensemble agébrique Z de $\mathbf{P}^n$. Si Y est un ouvert de X, alors Y est un ouvert de Z. Supposons que Y est un fermé de X. Alors $Y = F \cap X$ avec F un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$. Or $Y = (F \cap Z) \cap X$ est un ouvert de $F \cap Z$, qui est un ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n$. Ce qui montre que Y est une variété quasi-projective en tous cas.

4.4. Fonctions régulières sur variétés quasi-projectives

Soient $f(t_0, \ldots, t_n), g(t_0, \ldots, t_n) \in K[t_0, \ldots, t_n]$ avec g non nul. On appelle $\theta = \dfrac{f}{g} \in K(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ est une *forme homogène de degré zéro* si f et g sont homogènes de même degré. On dit que θ est *régulière* en $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbf{P}^n$ s'il existent $f_x, g_x \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que $\theta = \dfrac{f_x}{g_x}$ et $g_x(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$. Dans ce cas, on définit

$$\theta(x) = \frac{f_x(a_0, \ldots, a_n)}{g_x(a_0, \ldots, a_n)}.$$

On voit aisément que $\theta(x)$ est indépendant du choix de représentation de ϕ et du système des coordonnées homogènes de x. Par abus de notation, on note également

$$\theta(x) = \frac{f_x(x)}{g_x(x)}.$$

4.4.1. Définition. Soient X une variété quasi-projective et ϕ une fonction sur X.

(1) Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. On dit que ϕ est *régulière* si pour tout $x \in X$, il existent $f_x, g_x \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré et un voisinage U_x de x tels que pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U_x$,

$$\phi(y) = \frac{f_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}{g_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}.$$

(2) Supposons que $X \subseteq \mathbf{A}^n$. On dit que ϕ est *régulière* si $\phi \circ \varepsilon_0$ est régulière sur $\pi_0(X)$ dans le sens ci-dessus.

Exemples. (1) La fonction

$$\phi_{ij} : \mathbf{A}_i^m \to K : (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \mapsto \frac{a_j}{a_i}$$

est régulière.

(2) Une fonction constante sur X est régulière.

4.4.2. Proposition. Soit X une variété quasi-projective. Alors une fonction ϕ sur X est régulière si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que $\phi|_U$ est régulière.

Démonstration. Il suffit de montrer la suffisance. Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Soient $x \in X$ et U un voisinage de x tel que $\phi|_U$ est régulière. Ainsi il exsitent un voisinage V de x dans U et $f, g \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in V$,

$$\phi(y) = \frac{f(b_0, b_1, \ldots, b_n)}{g(b_0, b_1, \ldots, b_n)}.$$

Comme V est un voisinage de x dans X, on a θ est régulière.

Supposons que $X \subseteq \mathbf{A}^n$. Soit $x \in \pi_0(X)$. Alors il existe un voisinage U de $\varepsilon_0(x)$ tel que $\phi : U \to K$ est régulière. Donc $\pi_0(U)$ est un voisinage de x tel que $\phi \circ \varepsilon_0 : \pi_0(U) \to K$ est régulière. Donc $\phi \circ \varepsilon_0 : \pi_0(X) \to K$ est régulière, c'est-à-dire, ϕ est régulière.

4.4.3. Proposition. Soit X une variété quasi-projective. Alors l'ensemble $K[X]$ des fonctions régulières sur X est une K-algèbre.

Démonstration. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Soient $\phi_1, \phi_2 \in K[X]$. Soit $x \in X$. Pour $i = 1, 2$, il existent $f_i, g_i \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré et un voisinage U_i

de x tels que $\phi_i(y) = \dfrac{f_i(y)}{g_i(y)}$. Alors $U = U_1 \cap U_2$ est un voisinage de x tel que pour tous $y \in U$ et $a \in K$,

$$(a\phi_1)(y) = \frac{af_1(y)}{g_1(y)},\ (\phi_1 + \phi_2)(y) = \frac{(g_2 f_1 + g_1 f_2)(y)}{(g_1 g_2)(y)},\ (\phi_1\phi_2)(y) = \frac{(f_1 f_2)(y)}{(g_1 g_2)(y)}.$$

Ainsi $a\phi_1,\ \phi_1 + \phi_2\ \phi_1\phi_2 \in K[X]$.

Remarque. $K[X]$ n'est pas nécessairement de type fini en tant que K-algègre.

4.4.4. Proposition. $K[\mathbf{P}^n] = K$.

Démonstration. Soit $\phi \in K[\mathbf{P}^n]$. Pour tout $x \in \mathbf{P}^n$, il existent $f_x, g_x \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré et un voisinage U_x de x tels que $\phi(y) = \dfrac{f_x(y)}{g_x(y)}$ pour tout $y \in U_x$. On peut supposer que f_x et g_x sont co-premiers. Supposons que f_z et g_z sont non constants pour un $z \in \mathbf{P}^n$. Alors il existe $v = (a_0 : \cdots : a_n) \in \mathscr{Z}_p(g_z)$. Comme $\mathbf{P}^n$ est irréductible, $U_z \cap U_v$ est non vide. Remarquons que pour tout $y \in U_z \cap U_v$,

$$\frac{f_z(y)}{g_z(y)} = \frac{f_v(y)}{g_v(y)}.$$

On a $f_z g_v - g_z f_v$ s'annule sur $U_z \cap U_v$. Ainsi $f_z g_v - g_z f_v$ s'annule sur $\mathbf{P}^n$ car $\mathbf{P}^n$ est irréductible. Par conséquent, $f_z g_v - g_z f_v$ s'annule sur $\mathbf{A}^n$. Donc $f_z g_v = g_z f_v$. Ce qui donne $g_v \mid g_z$. En particulier, $g_v(a_0, \ldots, a_n) = 0$, c'est-à-dire, g_v s'annule en v, une contradiction. Ce qui achève la démonstration.

4.4.5. Proposition. Soit $X \subseteq \mathbf{A}^n$ une variété quasi-projective. Une fonction ϕ sur X est régulière si et seulment si pour tout $x \in X$, il existent $f_x, g_x \in K[t_1, \ldots, t_n]$ et un voisinage U_x de x tels que $\phi(y) = \dfrac{f_x(y)}{g_x(y)}$ pour tout $y \in U_x$.

Démonstration. Supposons que $\phi \circ \varepsilon_0$ est régulière sur $\pi_0(X)$. Soit $x \in X$. Il existent $f, g \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré et un voisinage U de $\pi_0(x)$ tels que pour tout $y = (b_0 : b_1 : \cdots : b_n) \in U$,

$$(\phi \circ \varepsilon_0)(y) = \frac{f(b_0, b_1, \ldots, b_n)}{g(b_0, b_1, \ldots, b_n)}.$$

Or $V = \varepsilon_0(U)$ est un voisinage de x et $f_\flat,\ g_\flat \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Pour tout $z = (b_1, \ldots, b_n) \in V$,

$$\phi(z) = (\phi \circ \varepsilon_0)(1 : b_1 : \cdots : b_n) = \frac{f(1, b_1, \ldots, b_n)}{g(1, b_0, \ldots, b_n)} = \frac{f_\flat(b_1, \ldots, b_n)}{g_\flat(b_0, \ldots, b_n)}.$$

Supposons maintenant que ϕ satisfait à la condition. Soit $z \in \pi_0(X)$. Alors $x = \varepsilon(z) \in X$ et $V = \pi_0(U_x)$ est un vosinage de z. Alors $f_z = t_0^{e_x} f_x^\sharp, g_z = t_0^{d_x} g_x^\sharp \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ sont homogènes de même degré, où d_x et e_x sont les de degrés de f_x et g_x respectivement. Pour tout $y = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in V$,

$$(\phi \circ \varepsilon_0)(y) = \phi\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) = \frac{f_x(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0})}{g_x(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0})} = \frac{f_z(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{g_z(a_0, a_1, \ldots, a_n)}.$$

Par conséquent, $\phi \circ \varepsilon$, et donc ϕ, est régulière.

On montrera que pour un ensemble algébrique affine X, la notion de fonction rgulière sur X définie dans coïncide avec celle-ci définie dans la définition 3.4.1.

4.4.6. Proposition. Soit X un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Soit ϕ une fonction sur X. Alors ϕ est régulière dans le sens de la définition 3.4.1 si et seulement si ϕ est régulière dans le sens de la définition 4.4.1.

Démonstration. Il suffit de montrer que ϕ est régulière dans le sens de la définition 3.4.1 si et seulement si ϕ satisfait à la condition énoncée dans la proposition 4.4.5. La nécesité est triviale.

Supposons que ϕ satisfait à la condition. Soit $x \in X$. Alors $g_x(x) \neq 0$ et $g_x(y)\phi(y) = f_x(y)$ pour tout $y \in U_x$. Comme $X \backslash U_x$ est fermé et $x \notin X \backslash U_x$, il existe $h_x \in \mathcal{Z}(X \backslash U_x)$ tel que $h_x(x) \neq 0$. Alors $(h_x(y)g_x(y))\phi(y) = h_x(y)f_x(y)$ pour tout $y \in X$ et $(h_x g_x)(x) \neq 0$. Ainsi on peut supposer que $g_x(y)\phi(y) = f_x(y)$ pour tout $y \in X$ et $g_x(x) \neq 0$.

Or $\mathcal{Z}_X(g_x|_X,\ x \in X) = \emptyset$. Ainsi $K[X] = (g_x|_X,\ x \in X) = (g_{x_1}|_X, \ldots, g_{x_r}|_X)$. Par conséquent, il existent $h_i \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tel que $1 = \sum_{i=1}^r g_{x_i}|_X h_i|_X$. Donc pour tout $y \in X$,

$$\phi(y) = \sum_{i=1}^r \phi(y) g_{x_i}(y) h_i(y) = \sum_{i=1}^r f_{x_i}(y) h_i(y) = (\sum_{i=1}^r f_{x_i} h_i)(y).$$

Ainsi ϕ est régulière dans le sens de la définition 3.4.1.

4.4.7. Lemme. Soient X une variété quasi-projective et $\phi \in K[X]$.

(1) Si $\phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, alors $\phi^{-1} \in K[X]$.

(2) Si $\phi(x) \neq 0$, alors il existe un voisinage V de x tel que $\phi(y) \neq 0$ pour tout $y \in V$.

(3) Si Y est une sous-variété de X, alors $\phi|_Y \in K[Y]$.

Démonstration. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Pour tout $x \in X$, il existent $f_x, g_x \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré et un voisinage U_x de x tels que pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U_x$,

$$\phi(y) = \frac{f_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}{g_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}.$$

(1) Supposons que $\phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Alors pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U_x$, $f(b_0, b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ car $\phi(y) \neq 0$. Donc

$$\phi^{-1}(y) = \frac{g_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}{f_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}.$$

Par conséquent $\phi^{-1} \in K[X]$.

(2) Supposons que $\phi(x) \neq 0$. Alors $x \notin \mathcal{Z}_p(f)$. Ainsi $V = U \cap (\mathbf{P}^n \backslash \mathcal{Z}_p(f))$ est un voisinage de x. On voit aisément que $\phi(y) \neq 0$ pour tout $y \in V$.

(3) Soit $Y \subseteq X$. Pour tout $x \in Y$, $V_x = U_x \cap Y$ est un voisinage de x dans Y. Or pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in V_x$,

$$\phi(y) = \frac{f_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}{g_x(b_0, b_1, \ldots, b_n)}.$$

Ce qui montre que $\phi|_Y \in K[Y]$.

4.5. Applications régulières de variétes quasi-projectives

On considère maintenant les applications régulières entre les variétés quasi-projectives.

4.5.1. Définition. Soient $\phi : X \to Y$ une application de variétés quasi-projectives.

(1) Supposons que $Y \subseteq \mathbf{A}^m$. On dit que ϕ est *régulière* s'il existent $\phi_1, \ldots, \phi_m \in K[X]$ tels que $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))$ pour tout $x \in X$.

(2) Supposons que $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. On dit que ϕ est *régulière* si pour tout $x \in X$ et pour un i tel que $\phi(x) \in \mathbf{A}_i^m$, il existe un voisinage U_x de x tel que $\phi(U_x) \subseteq \mathbf{A}_i^m$ et $\varepsilon_i \circ \phi : U_x \to \mathbf{A}^m$ est régulière dans le sens ci-dessus.

Remarques. (1) Une fonction régulière sur X est une application régulière de X dans $\mathbf{A}^1$.

(2) Si X et Y sont des ensembles algébriques, alors la régularité de f définie ci-dessus coïncide avec celle-ci définie dans la définition 3.4.1.

Exemple. Les applications

$$\pi_i : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n_i : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_i : \cdots : a_n)$$

et

$$\varepsilon_i : \mathbf{A}^n_i \to \mathbf{A}^n : (a_0 : \cdots : a_n) \mapsto (\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i})$$

sont régulières.

4.5.2. Proposition. Soit $\phi : X \to Y$ une application régulière de variétés quasi-projectives avec $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. Alors pour tout $x \in X$ et tout j tel que $\phi(x) \in \mathbf{A}^m_j$, il existe un voisinage V de x tel que $\phi(V) \subseteq \mathbf{A}^m_j$ et $\varepsilon_j \circ \phi : V \to \mathbf{A}^m$ est régulière.

Démonstration. Soit $x \in X$ tel que $\phi(x) \in \mathbf{A}^m_j$ avec $0 \leq j \leq m$. D'après la définition, il existe un voisinage U de X et $\phi_1, \ldots, \phi_m \in K[U]$ tels que $\phi(U) \subseteq \mathbf{A}^m_i$ pour un $0 \leq i \leq m$ et $(\varepsilon_i \circ \phi)|_V = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. Ainsi pour tout $y \in U$,

$$\phi(y) = (\phi_1(y) : \cdots : \phi_{i-1}(y) : 1 : \phi_i(y) : \cdots : \phi_m(y)) \, .$$

Supposons que $\phi(x) \in \mathbf{A}^m_j$ avec $j < i$. Alors $\phi_j(x) \neq 0$. Ainsi il existe un voisinage V de x dans U_x et donc dans X tel que $\phi_j(y) \neq 0$ pour tout $y \in V$. Or pour tout $y \in V$,

$$(\varepsilon_j \circ \phi)(y) = \left(\frac{\phi_1(y)}{\phi_j(y)}, \ldots, \frac{\phi_{j-1}(y)}{\phi_j(y)}, \frac{\phi_{j+1}(y)}{\phi_j(y)}, \ldots, \frac{\phi_{i-1}(y)}{\phi_j(y)}, \frac{1}{\phi_j(y)}, \frac{\phi_i(y)}{\phi_j(y)}, \ldots, \frac{\phi_m(y)}{\phi_j(y)} \right) .$$

Comme $\phi_l \phi_j^{-1}|_V, \phi_j^{-1}|_V \in K[V]$, $\varepsilon_j \circ \phi : V \to \mathbf{A}^m$ est régulière. Ce qui achève la démonstration.

4.5.3. Lemme. Soient X et Y des variétés quasi-projectives avec $X \subseteq \mathbf{A}^n$. Alors une application $\phi : X \to Y$ est régulière si et seulement si $\phi \circ \varepsilon_0 : \pi_0(X) \to Y$ est régulière.

Démonstration. D'abord supposons que $Y \subseteq \mathbf{A}^m$. Soient $\phi_1, \ldots, \phi_m$ les fonctions sur X telles que $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. Ainsi $\varepsilon_0 \circ \phi = (\varepsilon_0 \circ \phi_1, \ldots, \varepsilon_0 \circ \phi_m)$. Or ϕ est régulière si et seulement si les ϕ_i sont régulières si et seulement si les $\varepsilon_i \circ \phi$ sont régulières si et seulement si $\phi \circ \varepsilon_0 : \pi_0(X) \to Y$ est régulière.

Ensuite supposons que $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. Supposons que ϕ est régulière. Soit $x \in \pi_0(X)$ avec $(\phi \circ \varepsilon_0)(x) \in \mathbf{A}^m_i$. Il existe un voisinage U de $\varepsilon_0(x)$ tel que $\phi(U) \subseteq \mathbf{A}^m_i$ et $\pi_i \circ \phi : U \to \mathbf{A}^m$

est régulière. Donc $\pi_0(U)$ est un voisinage de x tel que $(\phi \circ \varepsilon_0)(\pi_0(U)) = \phi(U) \subseteq \mathbf{A}_i^m$ et $\varepsilon_i \circ \phi \circ \varepsilon_0 : \pi_0(U) \to \mathbf{A}^m$ est régulière. Donc $\phi \circ \varepsilon_0$ est régulière.

Supposons que $\phi \circ \varepsilon_0$ est régulière. Soit $x \in X$ avec $\phi(x) \in \mathbf{A}_i^m$. Il existe un voisinage U de $\pi_0(x)$ tel que $(\phi \circ \varepsilon_0)(U) \subseteq \mathbf{A}_i^m$ et $\pi_i \circ \phi\varepsilon_0 : U \to \mathbf{A}^m$ est régulière. Donc $\varepsilon_0(U)$ est un voisinage de x tel que $(\phi(\varepsilon_0)(U)) \subseteq \mathbf{A}_i^m$ et $\varepsilon_i \circ \phi : \varepsilon_0(U) \to \mathbf{A}^m$ est régulière. Donc ϕ est régulière.

4.5.4. Lemme. Soient X et Y des variétés quasi-projectives avec $Y \subseteq \mathbf{A}^m$. Alors une application $\phi : X \to Y$ est régulière si et seulement si $\pi_0 \circ \phi : X \to \pi_0(Y)$ est régulière.

Démonstration. Supposons que ϕ est régulière. Alors $(\pi_0 \circ \phi)(X) \subseteq \mathbf{A}_0^m$ et $\varepsilon_0 \circ (\pi_0 \circ \phi) = \phi$ esr régulière. Ainsi $\pi_0 \circ \phi : X \to \pi_0(Y)$ est régulière.

Supposons que $\pi_0 \circ \phi : X \to \pi_0(Y)$ est régulière. Soient $\phi_1, \ldots, \phi_m$ les fonctions sur X telles que $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. Soit $x \in X$. Il existe un voisinage U_x de x tel que $\varepsilon_0 \circ (\pi_0 \circ \phi) : U \to \mathbf{A}^m$ est régulière, c'est-à-dire, $\phi : U \to \mathbf{A}^m$ est régulière. Ainsi il exsitent $\psi_1, \ldots, \psi_m \in K[U]$ tels que pour tout $y \in U$ et $1 \leq i \leq m$, $\phi_i(y) = \psi_i(y)$. Donc les ϕ_i sont régulières sur X. Par conséquent ϕ est régulière.

4.5.5. Corollaire. Soient $X \subseteq \mathbf{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{A}^m$ des variétés quasi-projectives. Alors une application $\phi : X \to Y$ est régulière si et seulement si $\pi_0 \circ \phi \circ \varepsilon_0 : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est régulière.

4.5.6. Proposition. Soient $X \subseteq \mathbf{P}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{P}^m$ des variétés quasi-projectives. Alors une application $\phi : X \to Y$ est régulière si et seulment si pour tout $x \in X$ et tout i tel que $\phi(x) \in \mathbf{A}_i^m$, il existent un voisinage $U(x, i)$ de x et $f_0, \ldots, f_m \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U(x, i)$, $f_i(b_0, \ldots, b_n) \neq 0$ et

$$\phi(y) = (f_0(b_0, \cdots, b_n) : \cdots : f_i(b_0, \cdots, b_n) : \cdots : f_m(b_0, \cdots, b_n)) .$$

Démonstration. D'abord on montrera la suffisance. Soit $x \in X$ tel que $\phi(x) \in \mathbf{A}_0^m$. Alors pour tout $y \in U$,

$$(\varepsilon_0 \circ \phi)(y) = (\frac{f_1(b_0, \cdots, b_n)}{f_0(b_0, \cdots, b_n)}, \ldots, \frac{f_n(b_0, \cdots, b_n)}{f_0(b_0, \cdots, b_n)}).$$

Ainsi $\dfrac{f_1}{f_0}, \ldots, \dfrac{f_n}{f_0}$ sont des formes homogèges de degré zéro tels que $(\varepsilon_0 \circ \phi)|_U = (\frac{f_1}{f_0}|_U, \ldots, \frac{f_1}{f_0}|_U)$ est régulière. Par conséquent ϕ est régulière.

Supposons maintenant que $\phi : X \to Y$ est régulière. Soit $x \in X$ tel que $\phi(x) \in \mathbf{A}_i^m$. Il existe un voisinage U de x tel que $\phi(U) \subseteq \mathbf{A}_i^m$ et $(\varepsilon_i \circ \phi) : U \to \mathbf{A}^m$ est régulière. On peut supposer que $i = 0$. Alor sil existent des formes homogènes de degré zéro $\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_n}{g_n}$ tel que pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U$,

$$(\varepsilon_0 \circ \phi)(y) = \left(\frac{f_1(b_0, \ldots, b_n)}{g_1(b_0, \ldots, b_n)}, \ldots, \frac{f_n(b_0, \ldots, b_n)}{g_n(b_0, \ldots, b_n)} \right).$$

Posons $h_0 = g_1 \cdots g_n, h_1 = f_1 g_2 \cdots g_n, \ldots, h_n = g_1 \cdots g_{n-1} f_n$. Alors les h_i sont homogènes de même degré tels que pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U$, $h_0(b_0, \ldots, b_n) \neq 0$ et

$$\phi(y) = (h_0(b_0, \cdots, b_n) : h_1(b_0, \cdots, b_n) : \cdots : h_n(b_0, \cdots, b_n).$$

Ce qui achève la démonstration.

Soit $X \subseteq \mathbf{P}^n$ une variété quasi-projective. On voit aisément que U est un ouvert de X si et seulement si il existent $f_1, \ldots, f_r \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes tels que

$$U = \{x = (a_0 : \cdots : a_n) \imath X \mid f_i(a_0, \ldots, a_n) \neq 0, \ i = 1, \ldots, r\}.$$

4.5.7. Lemme. Une application régulière $\phi : X \to Y$ de variétés quasi-projectives est continue.

Démonstration. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. Soit V un ouvert de Y non vide. Alors $V_i = V \cap \mathbf{A}_i^m$ avec $0 \leq i \leq m$ est un ouvert contenu dans $\mathbf{A}_i^m$ et $V = V_0 \cup \cdots \cup V_m$. On voit que

$$U = \phi^{-1}(V) = \phi^{-1}(V_0) \cup \cdots \cup \phi^{-1}(V_m).$$

Posons $U_0 = \phi^{-1}(V_0)$. Soient $g_1, \ldots, g_r \in K[t_0, \ldots, t_m]$ homogènes tels que

$$V_0 = \{y = (b_0 : \cdots : b_m) \in Y \mid g_i(b_0, \ldots, b_m) \neq 0, \ i = 1, \ldots, r\}.$$

Soit $x \in U_0$. Alors il existe un voisinage U_x et $f_0, \ldots, f_m \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que pour tout $y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U_x$, $f_0(b_0, \ldots, b_m) \neq 0$ et

$$\phi(y) = (f_0(b_0, \ldots, b_n) : \cdots : f_m(b_0, \ldots, b_m).$$

Pour tout $1 \leq i \leq r$, $h_i = g_i(f_0(t_0, \ldots, t_n), \ldots, f_m(t_0, \ldots, t_n)) \in K[t_0, \ldots, t_n]$ est homogène. Ainsi

$$W_x = \{y = (b_0 : \cdots : b_n) \in U_x \mid h_i(b_0, \ldots, b_n) \neq, \ i = 1, \ldots, s\}$$

est un voisingae de x dans U_x et donc dans X. On voit que $\phi(W_x) \subseteq V_0$. Ainsi U_0 est ouvert. De même tout U_i avec $1 \leq i \leq m$ est ouvert. Donc U est ouvert. Ce qui achève la démonstration.

4.5.8. Proposition. Soient $\phi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ des applications régulières de variétés quasi-projectives. Alors $\psi \circ \psi$ est régulière.

Démonstration. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$, $Y \subseteq \mathbf{P}^m$ et $Z \subseteq \mathbf{P}^q$. Soit $x \in X$ tel que $\psi(\phi(x)) \in \mathbf{A}_i^q$. Il exite un voisinage $U_{\phi(x)}$ et $g_0, \ldots, g_q \in K[t_0, \ldots, t_m]$ homogènes de même degré tels que pour tout $y \in U_{\phi(x)}$, $g_i(y) \neq 0$ et $\psi(y) = (g_0(y) : \cdots : g_i(y) : \cdots : g_q(y))$. Supposons que $\phi(x) \in \mathbf{A}_j^m$. Alors il existe un voisinage U_x et $f_0, \ldots, f_m \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que pour tout $y \in U_x$, $f_j(y) \neq 0$ et

$$\phi(y) = (f_0(y) : \cdots : f_j(y) : \cdots : f_m(y)).$$

Or $V_x = U_x \cap \phi^{-1}(U_{\phi(x)})$ est un voisinage et $h_i = g_i(f_0, \ldots, f_m) \in K[t_0, \ldots, t_m]$, $i = 0, \ldots, q$ sont homogènes de même degré. Pour tout $y \in V_x$, on a

$$\phi(y) = (f_0(y) : \cdots : f_j(y) : \cdots : f_m(y)) \in U_{\phi(x)}.$$

Ainsi $h_i(y) \neq 0$ et $\psi(\phi(y)) = (h_0(y) : \cdots : h_i(y) : \cdots : h_m(y))$. Ce qui montre que $\psi \circ \phi$ est régulière.

Il suit immédiatement de la proposition précédente.

4.5.9. Proposition. Soient $\phi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ des applications régulières de variétés quasi-projectives. Alors

(1) $\phi^* : K[Y] \to K[X] : \eta \mapsto \eta \circ \phi$ est un homomorphisme de K-algèbres.

(2) $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

4.5.10. Définition. Soient X et Y des variétés quasi-projectives. Un isomorphisme $\phi : X \to Y$ est application régulière telle que ϕ^{-1} est régulière. Dans ca cas, on dit X et Y sont *isomorphes* et on note $X \cong Y$.

Remarque. Un isomorphisme est un homéomorphisme.

Exemples. Soit $X \subseteq \mathbf{A}^n$ une variété quasi-projective. Pour tout $0 \le i \le n$, $\pi_i : X \to \pi_0(X)$ est un isomorphisme ayant pour inverse $\varepsilon_i : \pi_0(X) \to X$.

4.5.11. Théorème. Si $\phi : X \to Y$ est un isomorhisme de variétés quasi-projectives, alors $\phi^* : K[Y] \to K[X]$ est un isomorphisme de K-algèbres.

Remarque. La réciproque du théorème précédent n'est pas valide. Par exemple, pour tout $x \in \mathbf{P}^n$, $K[\{x\}] \cong K \cong \mathbf{P}^n$.

4.5.12. Définition. Une variété quasi-projective X s'appelle une *variété projective* ou *variété affine* si X est ismorphe à un ensemble algébrique projectif ou un ensemble algébrique affine respectivement.

Exemples. (1) $\mathbf{A}_i^n$ est une variété affine pour tout $0 \le i \le n$.
(2) Soient $X = \{a \in \mathbf{A}^1 \mid a \ne 0\}$ et $Y = \{(a, b) \in \mathbf{A}^2 \mid ab = 1\}$. Alors

$$\phi : X \to Y : a \mapsto (a, \frac{1}{a})$$

est un isomorphisme ayant pour inverse $\psi : Y \to X : (a, b) \mapsto a$. Ainsi X est une variété affine.
(3) $\mathrm{grass}(r, n)$ est une variété projective.

Remarque. Si X est une variété affine, alors $K[X]$ est une K-algèbre noéthérienne, et donc de type fini.

Soit X une variété quasi-projective. On appelle un ouvert U de X est *affine* si U est une sous-variété affine de X.

4.5.13. Théorème. Soit X une variété quasi-projective. Alors tout $x \in X$ admet un voisinage affine.

Démonstration. Soient $X \subseteq \mathbf{P}^n$ et $x \in X$. On peut supposer $x \in X \cap \mathbf{A}_0^n$. Étant une variété quasi-projective, $X \cap \mathbf{A}_0^n = Y \backslash Y_1$, où $Y_1 \subset Y$ sont des ensembles algébriques de $\mathbf{P}^n$. Comme $x \notin Y_1$, il existe $g(t_0, \ldots, t_n) \in \mathcal{I}_p(Y_1)$ tel que $g(x) \ne 0$. On peut supposer que

$t_0 \not| g$. Or $D(g) = \{y \in Y \mid g(y) \neq 0\}$ est un voisinage de x. On montrera que $D(g)$ est une variété affine.

Soit $Y = \mathcal{I}_p(g_1, \ldots, g_m)$. Posons $f = g(1, t_1, \ldots, t_n), f_i = g_i(1, t_1, \ldots, t_n) \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Comme $t_0 \not| g$, on a $f^\sharp = g$, c'est-à-dire,

$$f(\frac{t_1}{t_0}, \cdots, \frac{t_n}{t_0}) = \frac{g(t_0, t_1, \ldots, t_n)}{t_0^d},$$

où d est le degré de g. Posons $Z = \mathcal{I}(f_1, \ldots, f_m, t_{n+1}f - 1) \subseteq \mathbf{A}^{n+1}$. Alors

$$\phi : Z \to D(g) : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (1 : a_1 : \cdots : a_n)$$

est un isomorphisme ayant pour inverse

$$\psi : D(g) \to Z : (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \mapsto \left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}, \frac{a_0^d}{g(a_0, \ldots, a_n)} \right).$$

Ce qui achève la démonstration.

Rappelons que pour tout $a \in A$, $S = \{1, a, \ldots, a^r, \ldots, \}$ est multiplicativement stable. On note

$$A_a = S^{-1}A = \{\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a^i} \mid n \geq 0,\ a_i \in A\}.$$

4.5.14. Lemme. Soient $f, f_1, \ldots, f_m \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tel que $f^r \notin (f_1, \ldots, f_m)$ pour tout $r \geq 0$. Alors

$$K[t_1, \ldots, t_{n+1}]/(f_1, \ldots, f_m, t_{n+1}f - 1) \cong (K[t_1, \ldots, t_n]/(f_1, \ldots, f_m))_{\bar{f}},$$

où $\bar{f} = f + (f_1, \ldots, f_m)$.

Démonstration. Posons $S = \{1, f, \ldots, f^r, \ldots, \}$. D'abord,

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & K[t_1, \ldots, t_{n+1}]/(t_{n+1}f - 1) & \to & S^{-1}K[t_1, \ldots, t_n] \\ & h(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) + (t_{n+1}f - 1) & \mapsto & h(t_1, \ldots, t_n, f^{-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux ayant pour inverse

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & S^{-1}K[t_1, \ldots, t_n] & \to & K[t_1, \ldots, t_{n+1}]/(t_{n+1}f - 1) \\ & \sum_{i=0}^{r} g_i(t_1, \ldots, t_n)\, f^{-i} & \mapsto & \sum_{i=0}^{r} g_i(t_1, \ldots, t_n) t_{n+1} + (t_{n+1}f - 1). \end{array}$$

Or

$$\psi\left((f_1,\ldots,f_m,t_{n+1}f-1)/(t_{n+1}f-1)\right)=S^{-1}(f_1,\ldots,f_m).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K[t_1,\ldots,t_{n+1}]/(f_1,\ldots,f_m,t_{n+1}f-1) &\cong S^{-1}K[t_1,\ldots,t_n]/S^{-1}(f_1,\ldots,f_m) \\ &\cong (K[t_1,\ldots,t_n]/(f_1,\ldots,f_m))_{\bar f}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

4.5.15. Thórème. Soient X une variété affine et $\phi \in K[X]$.

(1) $D(\phi)=\{x\in X \mid \phi(x)\neq 0\}$ est un ouvert affine de X, appelé *ouvert principal.*

(2)

$$K[D(\phi)]\cong K[X]_\phi = K[X][\phi^{-1}].$$

Démonstration. On peut supposer que X est un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Or $\phi=f|_X$ avec $f\in K[t_1,\ldots,t_n]$. Donc $D(\phi)=X\backslash\mathcal{Z}(f)$ est un ouvert de X. Soit $\mathcal{I}(X)=(f_1,\ldots,f_m)$ avec $f_1,\ldots,f_m\in K[t_1,\ldots,t_n]$. Remarquons que $f\notin(f_1,\ldots,f_m)$. Posons $Y=\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_m,ft_{n+1}-1)\subseteq\mathbf{A}^{n+1}$. Comme $\phi(y)\neq 0$ pour tout $y\in D(\phi)$, on a $\phi^{-1}\in K[D(\phi)]$. Ainsi

$$\eta: D(\phi)\to Y:(a_1,\ldots,a_n)\mapsto\left(a_1,\ldots,a_n,\frac{1}{f(a_1,\ldots,a_n)}\right)$$

est un isomorphisme ayant pour inverse $\theta: Y\to D(\phi):(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})\mapsto(a_1,\ldots,a_n)$. Or

$$K[t_1,\ldots,t_{n+1}]/(f_1,\ldots,f_m,t_{n+1}f-1)\cong(K[t_1,\ldots,t_n]/(f_1,\ldots,f_m))_{\bar f}\cong K[X]_\phi$$

est réduit. Ainsi $(f_1,\ldots,f_m,t_{n+1}f-1)$ est un idéal radiciel. Par conséquent,

$$K[D(\phi)]\cong K[Y]\cong K[t_1,\ldots,t_{n+1}]/(f_1,\ldots,f_m,t_{n+1}f-1)\cong K[X]_\phi.$$

4.6. Fonctions rationnelles

On se fixe X une variété quasi-projective irréductible. On désignera par $\mathcal{I}(X)$ l'idéal de $K[t_0,t_1,\ldots,t_n]$ (respectivement, de $K[t_1,\ldots,t_n]$) des polynômes qui s'annulent sur X.

4.6.1. Lemme. $\mathcal{I}(X)$ est premier.

Démonstration. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Soit Z la fermeture de X dans $\mathbf{P}^n$. Alors X est ouvert dans Z. Comme X est irréductible, Z l'est aussi. Ainsi $\mathcal{I}_p(Z)$ est premier. Si $f \in \mathcal{I}(X)$, alors f s'annule sur Z car Z est irréductible. Donc $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}_p(Z)$. Par conséquent, $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}_p(Z)$ est premier.

4.6.2. Définition. (1) Si $X \subseteq \mathbf{A}^n$, on appelle $\dfrac{f}{g} \in K(t_1, \ldots, t_n)$ avec $g \notin \mathcal{I}(X)$ une *fonction rationnelle sur* X.

(2) Si $X \subseteq \mathbf{P}^n$, on appelle $\dfrac{f}{g} \in K(t_0, \ldots, t_n)$ avec f, g homogènes de degré zéro et $g \notin \mathcal{I}(X)$ une *fonction rationnelle sur* X.

4.6.3. Proposition. (1) Les fonctions rationelles sur X forment une K-algèbre, notée $\mathcal{O}_X$.

(2) Les $\theta \in \mathcal{O}_X$ telles que $\theta = \dfrac{f}{g}$ avec $f \in \mathcal{I}(X)$ forment un idéal maximal, noté $\mathcal{M}_X$.

Démonstration. Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Soient $\theta_1 = \dfrac{f_1}{g_1}, \theta_2 = \dfrac{f_2}{g_2} \in \mathcal{I}(X)$ avec $g_1, g_2 \notin \mathcal{I}(X)$. Comme $\mathcal{I}(X)$ est premier, $g_1 g_2 \notin \mathcal{I}(X)$. Ainsi

$$a\theta = \frac{af}{g},\ \theta_1 + \theta_2 = \frac{g_2 f_1 + f_2 g_1}{g_1 g_2},\ \theta_1\theta_2 = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} \in \mathcal{I}(X).$$

Ainsi $\mathcal{O}_X$ est un anneau. Si $\theta = \dfrac{f}{g} \in \mathcal{O}_X \backslash \mathcal{M}_X$, alors $f \notin \mathcal{I}(X)$. Ainsi θ est inversible. Ce qui montre que $\mathcal{M}_X$ est maximal.

4.6.4. Proposition. Supposons que X est un ensemble algébrique irréductible de $\mathbf{A}^n$ et $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles de X. Alors

$$K(X) \cong \mathcal{O}_X / \mathcal{M}_X.$$

Démonstration. Soit $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles de X. On voit aisément que

$$\Phi : \mathcal{O}_X \to K(X) : \ \frac{f}{g} \mapsto \frac{f|_X}{g|_X}$$

est un épimorphisme de K-algèbres avec $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathcal{M}_X$.

4.6.5. Définition. On appelle

$$K(X) = \mathcal{O}_X / \mathcal{M}_X$$

le *corps des fonctions* de X.

Soit

$$f(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{r_0+r_1+\cdots+r_n=d} a_{r_0 r_1 \cdots r_n}\, t_0^{r_0}\, t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \in K[t_0, \ldots, t_n]$$

homogène de degré d. Alors

$$f = t_0^d \sum_{r_0+r_1+\cdots+r_n=d} a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \frac{t_0^{r_0}}{t_0^{r_0}} \frac{t_1^{r_1}}{t_0^{r_1}} \cdots \frac{t_n^{r_n}}{t_0^{r_n}} = t_0^d\, f(1,\ \frac{t_1}{t_0},\ \ldots,\ \frac{t_n}{t_0}).$$

Par conséquent, si $f, g \in K[t_0, \ldots, t_n]$ sont homogènes de même degré, alors

$$\frac{f}{g} = \frac{f(1, \frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0})}{g(1, \frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0})} = \frac{f_\flat(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0})}{g_\flat(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0})}.$$

4.6.6. Proposition. Si $X \subseteq \mathbf{A}^n$, alors $K(X) \cong K(\pi_0(X))$.

Démonstration. Pour tout $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$, $f \in \mathcal{I}(X)$ si et seulement si $f^\sharp \in \mathcal{I}(\pi_0(X))$.

$$\Phi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\pi_0(X)} : \frac{f}{g} \mapsto \frac{f(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0})}{g(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0})}$$

est un monomorphisme. En outre si $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{O}_{\pi_0(X)}$, alors $\dfrac{f_\flat}{g_\flat} \in \mathcal{O}_X$ tel que $\Phi^{-1}(\dfrac{f_\flat}{g_\flat}) = \dfrac{f}{g}$. Ainsi Φ est un épimorphisme tel que $\Phi^{-1}(\mathcal{M}_{\pi_0(X)}) = \mathcal{M}_X$. Donc $K(\pi_0(X)) \cong K(X)$.

4.6.7. Lemme. Si U est un ouvert de X, alors $K(U) = K(X)$.

Démonstration. Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. D'abord, U est irréductible car X l'est. Soit $h \in K[t_0, \ldots, t_n]$. Alors h s'annule sur X si et seulement si h s'annule sur U car X est irréductible. Ainsi $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(U)$. Par conséquent, $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U$ et $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_U$. Ce qui donne $K(X) = K(U)$.

4.6.8. Corollaire. Pour toute variété quasi-projective irréductible X, il existe une variété irréductible affine ou projective telle que $K(X) = K(Y)$.

Démonstration. Soit $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Alors X est un ouvert d'un fermé de $\mathbf{P}^n$. Soit Y la fermeture de X dans $\mathbf{P}^n$. Alors Y est irréductible et X est un ouvert de X. Ainsi $K(X) = K(Y)$.

Le résultat nous dit que pour étudier les corps de fonctions de variétés quasi-projectives, il suffit d'étudier les corps des fonctions de variétés affines ou projectives.

4.7. Équivalence birationnelle

Premièrement on se fixe X, Y et Z des variétés quasi-projectives irréductibles avec $X \subseteq \mathbf{P}^n$, $Y \subseteq \mathbf{P}^m$ et $Z \subseteq \mathbf{P}^q$.

On dit que $\theta \in \mathcal{O}_X$ est *régulière en* $x \in X$ s'il existe $f_x, g_x \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que $\theta = \dfrac{f_x}{g_x}$ et g_x ne s'annule pas en x. Dans ce cas, on pose

$$\theta(x) = \frac{f_x(x)}{g_x(x)},$$

qui est indépendant du représentation de θ.

4.7.1. Lemme. Soit $\theta \in \mathcal{O}_X$.

(1) $U = \{x \in X \mid \theta \text{ est régulière en } x\}$ est un ouvert non vide de X, appelé le *domaine de définition* de θ.

(2) $\theta|_U$ est une fonction régulière sur U.

Démonstration. Soit $x \in U$. Alors $U_x = \{y \in X \mid g_x(y) \neq 0\}$ est un voisinage de x. Et pour tout $y \in U_x$,

$$\theta(y) = \frac{f_x(y)}{g_x(y)}.$$

Ainsi $U_x \subseteq U$. Par conséquent U est ouvert. En outre, $\theta|_U$ est une fonction régulière.

4.7.2. Lemme. Soit $\theta \in \mathcal{O}_X$. Alors $\theta \in \mathcal{M}_X$ si et seulement si il existe un ouvert non vide U de X sur lequel θ est régulière et s'annule.

Démonstration. Supposons que θ est régulière et s'annule sur un ouvert non vide U. Pour tout $x \in U$, il existe $f, g \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré et un voisinage U_x de x tels que pour tout $y \in U_x$, $\theta(y) = \dfrac{f(y)}{g(y)}$. Comme X est irréductible, $U \cap U_x$ est non vide et f s'annule sur $U \cap U_x$. Encore comme X est irréductible, f_x s'annule sur X. Ainsi $\theta \in \mathbf{M}_X$.

Supposons que $\theta \in \mathcal{M}_X$ et U est le domaine de définition de θ. Alors $\theta = \dfrac{f}{g}$ avec $f \in \mathcal{I}(X)$. Ainsi pour tout $y \in U$, on a $\theta(y) = \dfrac{f(y)}{g(y)} = 0$.

Soient $\theta_0, \ldots, \theta_m \in \mathcal{O}_X$. On appelle $\theta = (\theta_0 : \cdots : \theta_m)$ une *application rationnelle* de X dans $\mathbf{P}^m$. On dit que θ est *régulière* en $x \in X$ si les θ_i sont toutes régulières en x et $(\theta_0(x) : \cdots : \theta_m(x)) \in \mathbf{P}^m$. Dans ce cas, on pose $\theta(x) = (\theta_0(x) : \cdots : \theta_m(x))$.

4.7.3. Lemme. Soit $\theta = (\theta_0 : \cdots : \theta_m) : X \to \mathbf{P}^m$ une application rationnelle. Alors

$$U = \{x \in X \mid \ \theta \text{ est régulière en } x\}$$

est un ouvert non vide de X, appelé le *domaine de définition* de θ.

Démonstration. Comme X est irréductible, il existe $x \in X$ tel que les θ_i sont toutes régulières en x. Or il existe un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, $\theta_i(y) = \dfrac{f_i(y)}{g_i(y)}$, où $\dfrac{f_i}{g_i} \in \mathcal{O}_X$. Remarquons que $V_x = \{y \in V \mid f_i(y) \neq 0 \ \text{ pour un } \ 0 \leq i \leq m\}$ est un voisinage de x et $V_x \subseteq U$. Ainsi U est ouvert.

4.7.4. Définition. Une *application rationnelle* $\theta : X \to Y$ est une application rationnelle de X dans $\mathbf{P}^m$ telle qu'il existe un ouvert non vide U de X sur lequel θ est régulière et $\theta(U) \subseteq Y$. La réunion de tels ouverts U s'appelle le *domaine de définition* de θ. En outre, on appelle

$$\theta(X) = \{y \in Y \mid y = \theta(x) \ \text{ pour un } \ x \in X\}$$

l'*image* de θ; et pour $V \subseteq Y$,

$$\theta^{-1}(V) = \{x \in X \mid \theta \ \text{ est régulière en } x \text{ et } \ \theta(x) \in V\}$$

le *pré-image* de V.

4.7.5. Lemme. Soient $\theta : X \to Y$ une application rationnelle et U le domaine de définition de θ.

(1) $\theta : U \to Y$ est une application régulière.

(2) Si V est un ouvert de Y, alors $\theta^{-1}(V)$ est un ouvert de X.

Démonstration. Soient $\theta = (\theta_0 : \cdots : \theta_m)$ avec $\theta_0, \ldots, \theta_m \in \mathcal{O}_X$. Alors $\theta_0|_U, \ldots, \theta_0|_U$ sont des fonctions régulière sur U. Soit $x \in U$. Supposons que $\theta(x) \in \mathbf{A}_0^m$. Alors il existe un voisinage V de x dans U tel que $\theta_0(y) \neq 0$ pour tout $y \in V$. Ainsi $(\pi_0 \circ \theta)(V) \subseteq \mathbf{A}_0^m$ et

$$(\pi_0 \circ \theta)|_V = (\frac{\theta_1}{\theta_0}|_U, \ \ldots, \frac{\theta_m}{\theta_0}|_U).$$

Par conséquent, $\theta : U \to Y$ est régulière.

Enfin si V un ouvert de Y, alors $\theta^{-1}(V) \subseteq U$. Comme $\theta : U \to Y$ est régulière, $\theta^{-1}(V)$ est un ouvert de U et donc de X. Ce qui achève la démonstration.

Soit $\theta = (\theta_0 : \cdots : \theta_m) : X \to Y$ une application rationnelle telle que $\theta(X)$ est dense dans Y. On peut supposer que $\theta_i = \dfrac{f_i}{f} \in \mathcal{O}_X$, $i = 0, \ldots, m$. Soient $\eta = \dfrac{h}{g} \in \mathcal{O}_Y$ et $\deg(h) = d = \deg(g)$. Alors

$$f^d\, h(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f}),\ f^d\, g(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f}) \in K[t_0, \ldots, t_n]$$

sont homogènes de même degré. Soit U le domaine de d'efinition de η. Alors $\theta(X) \cap U \neq \emptyset$. Ainsi il existe $x \in X$ tel que $f(x)^d h(\theta(x)) \neq 0$. Ce qui donne $f^d\, g(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f}) \notin \mathcal{I}(X)$. Par conséquent,

$$\eta \circ \theta = \frac{f^d\, h(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f})}{f^d\, g(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f})} = \frac{h(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f})}{g(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f})} \in \mathcal{O}_X.$$

Plus généralement, si $\eta = (\eta_0 : \cdots : \eta_p) : Y \to Z$ est une application rationnelle, alors la *composée* $\eta \circ \theta = (\eta_1 \circ \theta : \cdots : \eta_p \circ \theta)$ est une application rationnelle de X dans Z. Si $\eta \circ \theta$ est régulière en $x \in X$, alors

$$(\eta \circ \theta)(x) = \eta(\theta(x)) = (\eta_1(\theta(x)), \ldots, \eta_p(\theta(x)).$$

Il est évident que la composition d'applications rationnelles est associative.

4.7.6. Proposition. Soient $\theta : X \to Y$ et $\eta : Y \to Z$ des applications rationnelles telles que $\theta(X)$ est dense dans Y et $\eta(Y)$ est dense dans Z.

(1)

$$\theta^* : K(Y) \to K(X) : \phi + \mathcal{M}_Y \mapsto \phi \circ \theta + \mathcal{M}_X$$

est un monomorphisme de K-algèbres.

(2) $(\eta \circ \theta)^* = \theta^* \circ \eta^*$.

Démonstration. (1) On peut supposer que $\theta = (\dfrac{f_0}{f} : \cdots : \dfrac{f_m}{f})$ avec $\dfrac{f_i}{f} \in \mathcal{O}_X$, $i = 0, \ldots, m$. Si $h \in K[t_0, \ldots, t_m]$ est homogène de degré d, alors $h^* = f^d\, h(\frac{f_0}{f}, \ldots, \frac{f_m}{f}) \in K[t_0, \ldots, t_n]$ est homogène. On a vu que si $h \notin \mathcal{I}(Y)$, alors $h^* \notin \mathcal{I}(X)$. Supposons maintenant que $h \in \mathcal{I}(Y)$. Alors h^* s'annule sur le domaine de définition de θ. Ainsi h^* s'annule sur X car X est irréductible, c'est-à-dire $h^* \in \mathcal{I}(X)$. Par conséquent, $h \in \mathcal{I}(Y)$ si et selement si $h^* \in \mathcal{I}(X)$. Ce qui donne θ^* est un monomorphisme.

(2) Soit U un ouvert non vide de Z. Alors $\eta(Y) \cap U$ est non vide. Ainsi $V = \eta^{-1}(U)$ est un ouvert non vide Y. Donc $\theta(X) \cap V$ est non vide. Ce qui donne $(\eta \circ \theta)(X) \cap U$ est non vide. Ainsi $(\eta \circ \theta)(X)$ est dense dans Z. Or il est évident que $(\eta \circ \theta)^* = \theta^* \circ \eta^*$ car la composition des applications rationnelles est associative.

4.7.7. Définition. Une application rationnelle $\theta : X \to Y$ est dite *birationnelle* si $\theta(X)$ est dense dans Y et il existe une application rationnelle $\eta : Y \to X$ avec $\eta(Y)$ dense dans X telle que $(\eta \circ \theta)|_U = \mathbb{1}_U$ et $(\theta \circ \eta)_V = \mathbb{1}_V$ avec U un ouvert de X et V un ouvert de Y.

Exemple. Soit $X = \mathcal{I}_p(t_0^2 = t_1^2 + t_2^2)$. Alors

$$\theta = (1 : \frac{-2t_0t_1}{t_0^2 + t_1^2} : \frac{t_0^2 - t_1^2}{t_0^2 + t_1^2}) : \mathbf{P}^2 \to X$$

est une application birationnelle ayant pour inverse

$$\eta = (1 : \frac{t_2 - t_0}{t_1}) : X \to \mathbf{P}^2.$$

4.7.8. Lemme. Soit $\theta : X \to X$ une application rationnelle telle que $\theta^* = \mathbb{1}_{K(X)}$. Alors $\theta(x) = x$ lorsque θ est régulière en x.

Démonstration. Posons $\theta = (\theta_0 : \cdots : \theta_n)$. On peut supposer que $\theta_i = \dfrac{f_i}{f} \in \mathcal{O}_X$. Supposons que $\dfrac{t_j}{t_i} \in \mathcal{O}_X$. Alors

$$\frac{t_j}{t_i} + \mathcal{M}_X = \theta^*(\frac{t_j}{t_i} + \mathcal{M}_X) = \frac{f_j}{f_i} + \mathcal{M}_X.$$

Ainsi $t_if_j - t_jf_i \in \mathcal{I}(X)$ lorsque $t_i \notin \mathcal{I}(X)$. Or si θ est régulière en $x = (a_0 : \cdots : a_n)$ avec $a_i \neq 0$, alors $\theta(x) = (f_0(x) : \cdots : f_m(x)) = (a_0 : \cdots : a_m)$.

4.7.9. Lemme. Si $\Phi : K(Y) \to K(X)$ est un monomorphisme de K-algèbre, alors il existe une application rationnelle $\theta : X \to Y$ telle que $\theta(X)$ est dense dans Y et $\Phi = \theta^*$.

Démonstration. Soit Z la fermeture de Y dans $\mathbf{P}^m$. Alors Z est irréductible et Y est un ouvert de Z. Supposons que $Z = \mathcal{Z}_p(h_1, \ldots, h_s)$ et $Y = \mathcal{Z}_p(h_1, \ldots, h_s) \cap \mathcal{D}_p(h_{s+1}, \ldots, h_r)$, où $h_1, \ldots, h_r \in K[t_0, \ldots, t_m]$ sont homogènes et $h_{s+1}, \ldots, h_r \notin \mathcal{I}(Y)$. On peut supposer que $Y \cap \mathbf{A}_0^m$ est non vide. Alors t_0 ne s'annule pas sur U. Considérons les fonctions rationnelles $\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_m}{t_0} \in \mathcal{O}_Y$. Or pour tout $x = (a_0 : a_1 : \cdots : a_m) \in U$, on a

$$x = (1 : \frac{a_1}{a_0} : \cdots : \frac{a_m}{a_0}) = (1 : \frac{t_1}{t_0}(x) : \cdots : \frac{t_m}{t_0}(x)).$$

Comme $x \in Z$, on a $h_i(1(x), \frac{t_1}{t_0}(x), \ldots, \frac{t_m}{t_0}(x)) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq s$. Par conséquent,

$$h_i(1, \frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_m}{t_0}) \in \mathcal{M}_X,\ i = 1, \ldots, s.$$

De même, on voit que $h_j(1, \frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_m}{t_0}) \notin \mathcal{M}_X,\ j = s+1, \ldots, r$.

Soit $\theta_i \in \mathcal{O}_X$ tel que $\theta_i + \mathcal{M}_X = \Phi(\frac{t_i}{t_0} + \mathcal{M}_Y) \in K(X), \quad i = 1, \ldots, m$. On peut supposer que $\theta_i = f_i f$ avec $f, f_1, \ldots, f_m \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré. Donc $\theta = (1 : \theta_1 : \cdots : \theta_m)$ est une application de X dans $\mathbf{P}^m$. Pour tout $1 \leq i \leq r$,

$$h_i(1, \theta_1, \ldots, \theta_m) + \mathcal{M}_X = \Phi(h_i(1, \frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_m}{t_0}) + \mathcal{M}_Y).$$

Ainsi pour tout $1 \leq i \leq s$, $h_i(1, \theta_1, \ldots, \theta_m)$ s'annule sur X et pour tout $s < j \leq r$, $h_i(1, \theta_1, \ldots, \theta_m)$ s'annule sur X. Ce qui implque $\theta(X) \subseteq Z$. En particulier θ est une application rationnelle de X dans Z. Comme $h_r(1, \theta_1, \ldots, \theta_m)$ s'annule sur X, $U = \theta^{-1}(Y)$ est non vide et ouvert dans X. Ainsi θ est régulière sur U et $\theta(U) \subseteq Y$. Par conséquent θ est une application rationnelle de X dans Y.

Soit V un ouvert non vide de Y. Comme Y est irréductible, $V \cap \mathbf{A}_0^m$ est non vide. Alors $V \cap \mathbf{A}_0^m = \mathcal{Z}_p(h_1, \ldots, h_s) \cap \mathcal{D}_p(g_1, \ldots, g_d)$, où $g_1, \ldots, g_d \in K[t_0, \ldots, t_m] \backslash \mathcal{I}(V \cap \mathbf{A}_0^m)$ sont homogènes. De même, on voit que $g_i(1, \theta_1, \ldots, \theta_m) \notin \mathcal{M}_X$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Ainsi $\theta^{-1}(V \cap \mathbf{A}_0^m)$ est non vide. Ce qui veut dire que $\theta(X)$ est dense dans Y.

Enfin soit $\eta = \frac{h}{g} \in \mathcal{O}_Y$. On a vu que

$$\eta = \frac{f(1, \frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_m}{t_0})}{g(1, \frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_m}{t_0})}.$$

Ainsi

$$\Phi(\eta + \mathcal{M}_Y) = \frac{f(1, \theta_1, \ldots, \theta_m)}{g_(1, \theta_1, \ldots, \theta_m)} = \theta^*(\eta + \mathcal{M}_Y),$$

c'est-à-dire, $\Phi = \theta^*$.

4.7.10. Théorème. Il existe une application birationnelle $\theta : X \to Y$ si et seulement si $K(X) \cong K(Y)$.

Démonstration. Soient $\theta : X \to Y$ et $\eta : Y \to X$ des applications birationnelles telles que $\eta \circ \theta = \mathbb{1}_U$ et $\theta \circ \eta = \mathbb{1}_V$, où U et V sont les domaines de définition de $\eta \circ \theta$ et de $\theta \circ \eta$ respectivement. Pour tout $x \in U$, $[\phi \circ (\eta \circ \theta)](x) = \phi[(\eta \circ \theta)(x)] = \phi(x)$. Donc $\phi \circ (\eta \circ \theta) + \mathcal{M}_X = \phi + \mathcal{M}_X$. Ce qui implique $[(\theta^* \circ \eta^*)(\phi + \mathcal{M}_X) = \phi + \mathcal{M}_X$ pour tout $\phi \in \mathcal{O}_X$, c'est-à-dire, $\theta^* \circ \eta^* = \mathbb{1}_{K(X)}$. De même, $\eta^* \circ \theta^* = \mathbb{1}_{K(Y)}$. Par conséquent, $K(X) \cong K(Y)$.

Supposons maintenant que $\Phi : K(Y) \to K(X)$ est un isomorphisme de K-algèbres et $\Psi = \Phi^{-1}$. Alors il existe applications rationnelles $\theta : X \to Y$ et $\eta : Y \to X$ telles que $\theta(X)$ est dense dans Y et $\eta(Y)$ est dense dans X; et en outre $\theta^* = \Phi$ et $\eta^* = \Psi$. Ainsi $(\theta \circ \eta)^* = \mathbb{1}_{K(Y)}$ et $(\eta \circ \theta)^* = \mathbb{1}_{K(X)}$, Par conséquent θ est birationnelle.

Maitenant on suppose X et Y sont des variétés quasi-projectives irréductibles quelconques.

4.7.11. Définition. Soient X et Y des variétés quasi-projectives irréductibles quelconques.

(1) Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. On dit que X et Y sont *birationnelles* s'il existe une application birationnelle de X dans Y.

(2) Supposons que $X \subseteq \mathbf{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. On dit que X et Y sont *birationnelles* si $\pi_0(X)$ et Y le sont.

(3) Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{A}^m$. On dit que X et Y sont *birationnelles* si X et $\pi_0(Y)$ le sont.

(4) Supposons que $X \subseteq \mathbf{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{A}^m$. On dit que X et Y sont *birationnelles* si $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$ le sont.

4.7.12. Corollaire. (1) Les variétés quasi-projectives X et Y sont birationnelles si et seulement si $K(X) \cong K(Y)$.

(2) Les ouverts non vide d'une variété quasi-projectives sont deux à deux birationnelles.

Exemple. $\mathbf{A}^n$ est birationnelle à $\mathbf{P}^n$.

4.7.13. Proposition. Si X et Y sont isomorphes, alors X et Y sont birationnelles.

Démonstration. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. Soient $\phi : X \to Y$ un isomorphisme et $\psi = \phi^{-1}$. Il existe un ouvert U_0 de X et $f_0, \ldots, f_m \in K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que pour tout $x \in U_0$, $f_i(x) \neq 0$ et

$$\phi(x) = (f_0(x) : \cdots : f_i(x) : \cdots : f_m(x)).$$

Ainsi

$$\theta = (\frac{f_0}{f_i} : \cdots : \frac{f_{i-1}}{f_i} : 1 : \frac{f_{i+1}}{f_i} : \cdots : \frac{f_m}{f_i})$$

est une application rationnelle de X dans Y telle que $\theta(y) = \phi(y)$ pour tout $x \in U_0$. Comme ϕ est un homéomorphisme, $\theta(U_0) = \phi(U_0)$ est ouvert dans Y. Ainsi $\theta(X)$ est dense dans Y. De même, Il existe un ouvert V_0 de Y et une application rationnelle $\eta : Y \to X$ tels que $\eta(Y)$ est dense dans X et $\eta(y) = \psi(y)$ pour tout $y \in V_0$.

Or $U = \theta^{-1}(\theta(U_0) \cap V_0)$ est un ouvert non vide de X et $V = \eta^{-1}(\eta(V_0) \cap U_0)$ est un ouvert non vide Y. Pour tout $x \in U$, $(\eta \circ \theta)(y) = \eta(\theta(y)) = \psi(\phi(y)) = y$. Ainsi $\eta \circ \theta = \mathbb{1}_U$. De même, $\theta \circ \eta = \mathbb{1}_V$. Ainsi X et Y sont birationnelles.

4.7.14. Proposition. Les variétés quasi-projectives X et Y sont birationnelles si et seulement si X contient un ouvert U non vide isomorphe à un ouvert non vide V de Y.

Démonstration. Supposons que $U \cong V$. Alors U et V sont birationnelles. Ainsi X et Y sont birationnelles.

Supposons que X et Y sont birationnelles. Soient $\theta : X \to Y$ et $\eta : Y \to X$ des application birationnelles. Soient U un ouvert de X et V un ouvert de Y tels que $(\eta \circ \theta)|_U = \mathbb{1}_U$ et $(\theta \circ \eta)_V = \mathbb{1}_V$. Alors $U_0 = \theta^{-1}(V) \cap U$ est un ouvert non vide de X et $V_0 = \eta^{-1}(U) \cap V$. Alors $\theta(U_0) = V_0$ et $\eta(V_0) = U_0$. Mais $\theta : U_0 \to V_0$ et $\eta_0 : V_0 \to U_0$ sont régulières et donc sont des isomorphismes. Ce qui achève la démonstration.

Chapitre V: Dimension de variétés

5.1. Dimension d'espaces topoloiques

Partout dans cette section, on se fixe T un espace topologique non vide. On dit que T *décomposable* s'il est une réunion finie de fermés irréductibles.

5.1.1. Proposition. Soit T un espace topologique décomposable. Alors T admet seulement un nombre fini des fermés irréductibles maximaux $T_1, \ldots, T_r$, appelés *composantes irréductibles* de T. En outre,

(1) $T = T_1 \cup \cdots \cup T_r$.

(2) Si F est un fermé irréductible de T, alors $F \subseteq T_i$ pour un $1 \le i \le r$.

(3) Tout ouvert U de T est décomposable ayant pour composantes irréductibles les $U \cap T_i$ non vides.

Démonstration. Soit $T = T_1 \cup \cdots \cup T_r$ avec T_i fermé irréductible. Supposons $T_i \not\subseteq T_j$ si $i \ne j$. Soit F un fermé irréductible de T. Alors $F = (F \cap F_1) \cup \cdots \cup (F \cap F_r)$. Ainsi $F = F \cap T_i \subseteq T_i$ pour un $1 \le i \le r$. Si F est maximal parmi les fermés irréductibles, alors $T = T_i$. Pour tout $1 \le j \le r$, si $T_j \subseteq F$, alors $T_j \subseteq T_i$. Ainsi $i = j$ et $T_j = F$. Ce qui montre que les T_i les fermés irréductibles maximaux de T.

Enfin soit U un ouvert de T. Alors $U = (U \cap T_1) \cup \cdots \cup (U \cap T_r)$ avec $U \cap T_i$ fermé de U. Supposons que $U \cap T_i$ est non vide. Alors $U \cap U_i$ est irréductible car il est un ouvert de T_i. Pour tout $j \ne i$, $(U \cap T_i) \cap (U \cap (T_i \backslash T_j)$ est non vide car $T_i \backslash T_j$ est un ouvert non vide T_i. Ce qui montre $(U \cap Y_i) \not\subseteq (U \backslash Y_i)$ pour tout $j \ne i$. Ainsi les $U \cap Y_i$ non vides sont les composantes irréductibles de U.

5.1.2. Lemme. Soit $\{U_i \mid i \in I\}$ est une famille d'ouverts de T tel que $T = \cup \{U_i \mid i \in I\}$. Alors une partie F de T est fermée si et seulement si $F \cap U_i$ est fermée dans U_i pour tout $i \in I$.

Démonstration. D'abord, $U_i = T \backslash F_i$ avec F_i un fermé de T. Supposons que $F \cap U_i$ est fermé dans U_i pour tout $i \in I$. Alors $F \cap U_i = G_i \cap U_i$ avec G_i un fermé de T. Il suffit de vérifier que $F = \cap_{i \in I} G_i \cup F_i$. Soit $a \in F$. Alors pour tout $i \in I$, $a \in U_i$ ou $a \in F_i$. Donc

$a \in F \cap U_i = F \cap G_i$ ou $a \in F_i$, et donc $a \in G_i \cup F_i$ pour tout $i \in I$. Ainsi $F \subseteq \cap_{i\in I} G_i \cup F_i$. D'autre part, supposons que $a \in G_i \cup F_i$ pour tout $i \in I$. Or $a \in U_j$ pour un j. Ainsi $a \notin F_j$. Ce qui donne $a \in G_j$. Donc $a \in G_j \cap U_j = F \cap U_j$. Par conséquent, $a \in F$. Ce qui achève la démonstration.

5.1.3. Définition. La *dimension* de T, notée $\dim(T)$, est la borne supérieure des longueurs n des chaînes

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$$

de fermés irréductibles de T.

Remarques. On définit $\dim(\emptyset) = -1$.

Exemples. Si T contient un seul point, alors $\dim(T) = 0$.

(2) Si T est séparé, alors $\dim(T) = 0$.

5.1.4. Lemme. Soit S un sous-espace de T. Soient F un fermé de S et $\overline{F}$ la fermeture de F dans T.

(1) $F = S \cap \overline{F}$.

(2) Si F est irréductible, alors $\overline{F}$ est irréductible.

Démonstration. (1) Comme F est fermé dans S, $F = G \cap S$ avec G un fermé de T. Ainsi $\overline{F} \subseteq G$. Or $F \subseteq \overline{F} \cap S \subseteq G \cap S = F$. Donc $F \subseteq \overline{F} \cap S$.

(2) Supposons que F est irréductible. Si $\overline{F} = G_1 \cup G_2$ avec G_1, G_2 fermés dans T. Alors $F = (S \cap G_1) \cup (S \cap G_2)$ avec $S \cap G_1$, $S \cap G_2$ fermés dans S. Ainsi $F = S \cap G_1$ ou $F = S \cap G_2$. Donc $F \subseteq G_1$ ou $F \subseteq G_2$. Ce qui donne $\overline{F} \subseteq G_1$ ou $\overline{F} \subseteq G_2$. Par conséquent $\overline{F} = G_1$ ou $\overline{F} = G_2$. Donc $\overline{F}$ est irréductible.

5.1.5. Proposition. Soient T un espace topologique et S un sous-espace de T. Alors $\dim(S) \leq \dim(T)$.

Démonstration. Soit

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$$

est une chaîne de fermés irréductibles de S. Alors $\overline{F_i}$ est un fermé irréductible de T tel que $F_i = \overline{F_i} \cap S$, $i = 0, \ldots, n$. Ainsi

$$\overline{F_0} \subset \overline{F_1} \subset \cdots \subset \overline{F_n}$$

est une chaîne de fermés irréductibles de T. Par conséquent, $\dim(S) \leq \dim(T)$.

Si $\dim(T)$ est fini, on appelle $\mathrm{codim}_T S = \dim(T) - \dim(S)$ la *codimension* de S dans T.

5.1.6. Proposition. Soit T un espace topologique irréductible de dimension finie. Si S est un fermé propre de T, alors $\dim(S) < \dim(T)$.

Démonstration. D'abord $\dim(S) = s$ est fini. Remarquons qu'il existe une chaîne

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_s$$

de fermés irréductibles de S. Or

$$\overline{F_0} \subset \overline{F_1} \subset \cdots \subset \overline{F_s} \subset T$$

est une chaîne de fermés irréductibles de T. Ainsi $\dim(S) = s < \dim(T)$.

5.1.7. Proposition. Soient T un espace topologique et S un ouvert de T.

(1) Si $F \subset G$ sont des fermés de T avec G irréductible et $F \cap S$ non vide, alors $F \cap S \subset G \cap S$.

(2) Soit

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$$

est une chaîne de fermés irréductibles de T. Si $S \cap F_0$ est non vide, alors $\dim(S) \geq n$.

Démonstration. (1) Supposns que $F \cap S = G \cap S$. Soit $x \in G \backslash F$. Alors $x \notin F \cap S = G \cap S$, et donc $x \notin S$. Ainsi $x \in G \backslash S = G \cap (T \backslash S)$. Ce qui donne $G = F \cup (G \backslash F) = F \cup (G \cap (T \backslash S))$. Donc $G \subseteq T \backslash S$. Ce qui contredit $F \cap S$ est non vide.

Maintenant supposons que $S \cap F_0$ est non vide. Alors

$$F_0 \cap S \subset F_1 \cap S \subset \cdots \subset F_n \cap S$$

est une chaîne de fermés non vides de S. Remarquons que $F_i \cap S$ est un ouvert de F_i. Ainsi $F_i \cap S$ est irréductible car F_i l'est. Ce qui montre que $\dim(S) \geq n$.

5.1.8. Théorème. Soit $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ avec T_i fermé. Alors

$$\dim(T) = \sup\{\dim(T_1), \ldots, \dim(T_n)\}.$$

Démonstration. Soit F un fermé irréductible de T. Alors

$$F = (F \cap T_1) \cup \cdots \cup (F \cap T_n).$$

Comme les $F \cap T_i$ sont fermés, on a $F = F \cap T_i$, c'est-à-dire, $F \subseteq F_i$ pour un $1 \le i \le n$. Or si

$$(*) \qquad F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r$$

est une chaîne de fermés irréductibles de T, alors $F_r \subseteq T_i$ pour un $1 \le i \le n$. Ainsi $(*)$ est une chaîne de fermés irréductibles de T. Ainsi

$$\dim(T) \le \sup\{\dim(T_1), \ldots, \dim(T_n)\}.$$

Ce qui achève la démonstration.

5.2. Dimension de variétés quasi-projectives

5.2.1. Lemme. Soient A un domaine d'intégrité et $P \in \mathrm{Spec}(A)$.

(1) Si $a \in A$ est non nul non unité et P un idéal premier minimal de (a), alors $\mathrm{ht}(P) = 1$.

(2) Si A est à factorization unique, alors $\mathrm{ht}(P) = 1$ si et seulement si $P = (a)$ avec a irréductible.

Démonstration. (1) On sait $\mathrm{ht}(P) \le 1$. Comme 0 est premier, $\mathrm{ht}(P) = 1$.

(2) Supposons que $\mathrm{ht}(P) = 1$. Prenons $a \in P$ non nul et p un diviseur irréductible de a. Alors (p) est premier. Ainsi $P = (p)$.

5.2.2. Théorème. Soit A une K-domaine d'intégrité noethérien. Soit P un idéal minimal de (a) avec $a \in A$ non nul. Alors

$$\dim(A/P) = \dim(A) - 1.$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, $\mathrm{ht}(P) = 1$. D'après le théorème de normalisation, il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ algébriquement indépendants sur K et A est intégral sur $B = K[x_1, \ldots, x_n]$. Remarquons que B est à factorisation unique et $\dim(A)\dim(B) = n$.

Posons $Q = P \cap B$. Alors $\mathrm{ht}(Q)$ $=\mathrm{ht}(P) = 1$. Comme B est à factorisation unique, $Q = (p)$ avec $p(x_1, \ldots, x_n)$ irréductible. Supposons que p contient x_n. Si $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1} \in A/(p)$

sont algb́riquement dépendants sur K, alors il existe un polynôme g non nul sur K tel que $g(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) = 0$. Ainsi $p \,|\, g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ce qui est impossible car p contient p_n. Donc $\text{deg.tr.}_K\, B/Q \geq n-1$, c'est-à-dire, $\dim(B/Q) \geq n-1$. Mais $\dim(B/Q) \leq \dim(B) - \text{ht}(Q) = n-1$. Ce qui donne $\dim(B/Q) = n-1$. Or $B/Q \cong (B+P)/P$ et A/P est intégral sur $(B+P)/P$. On a

$$\dim(A/P) = \dim((B+P)/P) = \dim(B/Q) = n-1.$$

5.2.3. Lemme. Soient X une variété affine et $\phi \in K[X]$. Alors $D(\phi) = \{x \in X \mid \phi(x) \neq 0\}$ est un ouvert affine de X, appelé *ouvert principal*.

Démonstration. On peut supposer que X est un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Or $\phi = f|_X$ avec $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Donc $D(\phi) = X \backslash \mathcal{Z}(f)$ est un ouvert de X. Soit $\mathcal{I}(X) = (f_1, \ldots, f_m)$ avec $f_1, \ldots, f_m \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Remarquons que $f \notin (f_1, \ldots, f_m)$. Posons $Y = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_m, ft_{n+1} - 1) \subseteq \mathbf{A}^{n+1}$. Comme $\phi(y) \neq 0$ pour tout $y \in D(\phi)$, on a $\phi^{-1} \in K[D(\phi)]$. Ainsi

$$\eta : D(\phi) \to Y : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \left(a_1, \ldots, a_n, \frac{1}{f(a_1, \ldots, a_n)}\right)$$

est un isomorphisme ayant pour inverse $\theta : Y \to D(\phi) : (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$.

Le résultat nous permet de réduire létude de variétés quasi-projectives à létude de variétés affines.

5.2.4. Théorème. Une variété quasi-projective X est couverte par un nombre fini d'ouverts affines.

Démonstration. D'abord supposons que $X \subseteq \mathbf{A}^n$. Alors X est un ouvert d'un fermé Y de $\mathbf{A}^n$. Ainsi il existe $f_1, \ldots, f_r \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tels que

$$X = \{y \in Y \mid f_i(y) \neq 0 \;\text{ pour un }\; 1 \leq i \leq r\} = \cup_{i=1}^r D_Y(f_i).$$

Remarquons que $D(f_i|_Y)$ est un ouvert affine de Y, et donc un ouvert affine de X.

Soit $X \subseteq \mathbf{P}^n$, alors

$$X = (X \cap \mathbf{A}_0^n) \cup \cdots (X \cap \mathbf{A}_n^n).$$

Remarquons que $X \cap \mathbf{A}_i^n$ est un ouvert de X qui est isomorphe à une sous-variété de $\mathbf{A}^n$. Ce qui achève la démonstration.

5.2.4. Théorème. Soit X une variété affine. Alors $\dim(X) = \dim K[X]$. En particulier, X est de dimension finie.

Démonstration. Par hypothèse, $X \cong Y$ avec Y un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n$. Alors X est homéomorphe à Y et $K[X] \cong K[Y]$. Ainsi $\dim(X) = \dim(Y)$ et $\dim K[X] = \dim K[Y]$. Rappelons que $\dim K[Y]$ est la borne supérieure des chaînes d'idéaux premiers de $K[Y]$. Or si $Y_0 \subset \cdots \subset Y_{r-1} \subset Y_r$ est une chaîne de fermés irréductibles de Y, alors

$$\mathcal{I}_Y(Y_0) \supset \cdots \supset \mathcal{I}_Y(Y_{s-1}) \supset \mathcal{I}_Y(Y_s)$$

est une chaîne d'idéaux premiers de $K[Y]$. Réciproquement si $I_0 \subset \cdots \subset I_{s-1} \subset I_s$ est une chaîne d'idéaux premiers de $K[Y]$, alors

$$\mathcal{Z}_Y(I_0) \supset \cdots \supset \mathcal{Z}_Y(I_{s-1}) \supset \mathcal{Z}_Y(I_s)$$

est une chaîne de fermé irréductibles de Y. Par conséquent, $\dim(Y) = \dim K[Y]$. Comme $K[Y]$ est de type fini, $\dim K[Y]$ est fini. Ce qui achève la démonstration.

Exemple. (1) $\dim(\mathbf{A}^n) = n$.
(2) L'ouvert $\mathbf{A}_i^n$ de $\mathbf{P}^n$ avec $0 \leq i \leq n$ est de dimension n.

Soit X une variété quasi-projective. Remarquons que si $X_1, \ldots, X_r$ sont les composantes irréductibles de X, alors

$$\dim(X) = \sup\{\dim(X_1), \ldots, \dim(X_r)\}.$$

5.2.5. Théorème. Soit X une variété quasi-projective irréductible. Alors

$$\dim(X) = \text{deg.tr.}_K\, K(X).$$

Démonstration. D'abord supposons que X est un ensemble algébrique irréductible. Alors $K[X]$ est un domaine d'intégrité et $K(X)$ est le corps des fractions de $K[X]$. Ainsi $\dim(X) = \dim K[X] = \text{deg.tr.}_K\, K(X)$. Ainsi le résultat est valide pour les variétés affines irréductibles.

En général, prenons une sous-variété affine U de X. Alors $K(X) = K(U)$. Ainsi

$$\text{deg.tr.}_K\, K(X) = \text{deg.tr.}_K\, K(U) = \dim(U) \leq \dim(X).$$

Soit $Y_0 \subset \cdots \subset Y_{r-1} \subset Y_r$ une chaîne de fermés irréductibles de X. Prenons $x \in Y_0$. Alors x admet un voisinage affine U_x. Or $\text{deg.tr.}_K K(X) = \dim(U_x) \geq r$. Ainsi $\dim(X) \leq \text{deg.tr.}_K K(X)$. Ce qui donne $\text{deg.tr.}_K K(X) = \dim(X)$.

5.2.6. Corollaire. Soit X et Y des variétés quasi-projectives irréductibles.

(1) Si U est un ouvert de X, alors $\dim(U) = \dim(X)$.

(2) Si X et Y sont birationnelles, alors $\dim(X) = \dim(Y)$.

Exemples. (1) $\dim(\mathbf{P}^n) = n$. Par conséquent, toute variété quasi-projective est de dimension finie.

(2) L'hyperbole $X = \{(a, b) \mid ab = 1\}$ est birationnelle à $Y = \mathbf{A}^1\backslash\{0\}$. Ce dernier est un ouvert de $\mathbf{A}^1$. Ainsi $\dim(X) = \dim(Y) = \dim(\mathbf{A}^1) = 1$.

5.2.7. Théorème. Soit X une variété quasi-projective non vide. Alors $\dim(X) = 0$ si et seulement si X est fini.

Démonstartion. Supposons que $\dim(X) = 0$. On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$ est irréductible. Alors $X = X \cap \mathbf{A}^n_0 \cup \cdots \cup X \cap \mathbf{A}^n_n$. Si $X \cap \mathbf{A}^n_i$ est non vide, alors $X \cap \mathbf{A}^n_i$ est irréductible. Ainsi $Y = \varepsilon_i(X \cap \mathbf{A}^n_i)$ est sous variété irréductible de $\mathbf{A}^n$. Donc $Z = \overline{Y}$ est un ensemble algébrique irréductible de $\mathbf{A}^n$ de dimension zéro. Donc $K(Z)$ est algébrique sur K. En particulier, $K[Z]$ est algébrique sur K. Mais $K[Z]$ est une K-algèbre de type fini. Ce qui donne $\dim_K K[Z]$ est fini. Par conséquent, Z, et donc Y, est fini. Ce qui donne $X \cap \mathbf{A}^n_i$ est fini pour tout $0 \leq i \leq n$. Donc X est fini.

5.2.8. Proposition. Soit X une variété quasi-projective. Si $\phi \in K[X]$ est non unité, alors $\mathcal{Z}_X(\phi) = \{y \in X \mid \phi(y) = 0\}$ est un fermé non vide de X.

Démonstration. Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^n$. Comme ϕ n'est pas unité, $Y = \mathcal{Z}_X(\phi)$ est non vide. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U_x de x et $f_x, g_x \in K[t_0, \ldots, t_n]$ homogènes de même degré tels que pour tout $y \in U_x$, $\phi(y) = \dfrac{f_x(y)}{g_x(y)}$. Remarquons que $X = \cup\, x \in X\, U_x$. Pour tout $x \in X$, $Y \cap U_x = \{y \in U_x \mid f_x(y) = 0\}$ est un fermé de U_x. Ainsi Y est fermé dans X.

5.2.9. Théorème. Soit X une variété quasi-projective irréductible. Soit $\phi \in K[X]$ non nul et non unité. Si Y est une composante irréductible de $\mathcal{Z}_X(\phi)$, alors

$$\dim(Y) = \dim(X) - 1.$$

Démonstration. On considère premièrement que X est affine. On peut supposer que X est un ensemble algébrique irréductible de $\mathbf{A}^n$. Or $\mathcal{I}_X(Y)$ est un idéal premier de $K[X]$ avec $(\phi) \subseteq \mathcal{I}_X(Y)$. Si P est un idéal premier de $K[X]$ avec $(\phi) \subseteq P \subseteq \mathcal{I}_X(Y)$, alors $\mathcal{Z}_X(P)$ est un fermé irréductible avec $Y \subseteq \mathcal{Z}_X(P) \subseteq \mathcal{Z}_X(\phi)$. Ainsi $Y \subseteq \mathcal{Z}_X(P)$, et donc $P = \mathcal{I}_X(Y)$. Ce qui montre que $\mathcal{I}_X(Y)$ est un idéal premier minimal appartenant à (ϕ). Or

$$\dim(Y) = \dim K[X]/\mathcal{I}_X(Y) = \dim K[X] \ - \ 1 = \dim(X) - 1.$$

Par conséquent, $\dim(\mathcal{Z}_X(\phi)) = \dim(X) - 1$.

Supposons maintenant que X n'est pas affine. Soit Y une composante irréductible de $\mathcal{Z}_X(\phi)$. Prenons $y \in Y$ et U un voisinage affine de y dans X. Comme X est irréductible, ϕ ne s'annule pas sur U. Ainsi $\psi = \phi|_U \in K[U]$ est non nul et non unité car $\psi(y) = 0$. Or $\mathcal{Z}_U(\psi) = U \cap \mathcal{Z}_X(\phi)$ est un ouvert de $\mathcal{Z}_X(\phi)$. Ainsi $U \cap Y = \mathcal{Z}_U(\psi) \cap Y$ est une composnate irréductible de $\mathcal{Z}_U(\psi)$. Par conséquent,

$$\dim(Y) = \dim(U \cap Y) = \dim(U) - 1 = \dim(X) - 1.$$

Ce qui achève la démonstration.

5.2.10. Corollaire. Soit X un ensemble algébrique irréductible de $\mathbf{A}^n$ ou $\mathbf{P}^n$. Alors X est une hypersurface si et seulement si X est de codimension 1.

Démonstration. Si $X = Z(f)$ avec f un polynôme non nul et non unité, alors $\dim(X) = n - 1$. Réciproquement supposons $\dim(X) = n - 1$. Alors $\mathcal{I}(X) \neq 0$. Prenons $f \in \mathcal{I}(X)$ non nul et irréductible. Alors $X \subseteq \mathcal{Z}(f)$. Or $\dim(X) = n - 1\dim(\mathcal{Z}(f))$. Ainsi $X = \mathcal{Z}(f)$ est une hypersurface.

Exemple. (1) Une courbe irréductible de $\mathbf{A}^2$ ou $\mathbf{P}^2$ est de dimension 1.

(2) Une surface irréductible de $\mathbf{A}^2$ ou $\mathbf{P}^2$ est de dimension 2.

En général, une variété quasi-projective irréductible de dimension 1 ou 2 s'appelle une *courbe* ou *surface*, respectivement.

5.2.11. Théorème. Soit X une variété quasi-projective irréductible. Soient $\phi_1, \ldots, \phi_d \in K[X]$. Si Y est une composante irréductible de $\mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_d)$, alors

$$\dim(\mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_d)) \geq \dim(X) - d.$$

Démonstration. Le résultat es vrai pour $d = 1$. Supposons que $d > 1$ et le résultat est valide pour $d-1$. Comme $\mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_d) \subseteq \mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_{d-1})$, Y est contenue dans une composante irréductible F de $\mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_{d-1})$. Posons $\psi = \phi_m|_F$. Alors $Y \subseteq F \cap \mathcal{Z}_X(\phi_m) = \mathcal{Z}_F(\psi)$. Supposons que $Y \subseteq G$ avec G un fermé irréductible de $\mathcal{Z}_F(\psi)$. Alors G est un fermé irréductible de $\mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ car $F \cap \mathcal{Z}_X(\phi_m)$ est fermé. Ainsi $Y = G$. Ce qui implique Y est une composante irréductible de $\mathcal{Z}_F(\psi)$. Si $\psi = 0$, alors

$$\dim(Y) = \dim(\mathcal{Z}_F(\psi)) = \dim(F) \geq \dim(X) - d + 1.$$

Sinon

$$\dim(Y) = \dim(\mathcal{Z}_F(\psi)) - 1 = \dim(F) - 1 \geq \dim(X) - d.$$

Ce qui achève la démonstration.

Remarque. On n'a pas l'équalité en général. Par exemple, on peut avoir $\phi_1 = \cdots = \phi_m$.

5.2.12. Théorème. Soient $X \subseteq \mathbf{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{A}^m$ des variétés affines. Alors

$$\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y).$$

Démonstration. Soient $\dim(X) = r$ et $\dim(Y) = s$. D'après le lemme de normalisation, il existe des familles algébriquement indépendantes $\{u_1, \ldots, u_r\}$ et $\{v_1, \ldots, v_s\}$ de $K[X]$ et $K[Y]$ respectivement telles $K[X]$ est intégral sur $K[u_1, \ldots, u_r]$ et $K[Y]$ est intégral sur $K[v_1, \ldots, v_s]$. Ainsi $K[X \times Y] \cong K[X] \otimes_K K[Y]$ est intégral sur

$$K[u_1, \ldots, u_r] \otimes_K K[v_1, \ldots, v_s] \cong K[u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s].$$

Ainsi $\dim(X \times Y) = r + s$.

5.3. Morphisme et dimension

Soient X et Y des variétés quasi-projectives. On appelle une appliaction régulière $\phi : X \to Y$ un *morphisme*. On dit que ϕ est *dominant* si $\phi(X)$ dense dans Y (par expemple, si ϕ est surjectif). On voit aisément que la composée de morphismes dominants est dominante.

5.3.1. Proposition. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme dominant de variétés quasi-projectives irréductible.

(1) La co-restriction de ϕ à un ouvert non vide de Y est dominante.

(2) La restriction de ϕ à un ouvert non vide de X est dominant.

(3) $\dim(X) \geq \dim(Y)$.

Démonstration. (2) Soient U et V des ouverts non vides de X et Y, respectivement. Alors $\phi(X) \cap V$ est non vide et donc $\phi^{-1}(V)$ est un ouvert non vide de X. Comme X est irréductible, U rencontre $\phi^{-1}(V)$ en un point x. Alors $\phi(x) \in \phi(U) \cap V$. Ainsi $\phi|_U$ est dominant.

(3) On peut supposer que $X \subseteq \mathbf{P}^n$ et $Y \subseteq \mathbf{P}^m$. Comme ϕ est dominant, $\phi^* : K(Y) \to K(X)$ est un monomorphisme. Ainsi $\text{deg.tr.}_K K(Y) \leq \text{deg.tr.}_K K(X)$. Ce qui donne $\dim(X) \geq \dim(Y)$.

Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de variétés quasi-projectives. Si $y \in Y$, on appelle $\phi^{-1}(y)$ la *fibre* de y. Remarquons que ϕ^{-1} est fermé. On va étudier la dimension des fibres d'un morphisme dominant.

Exemple. Soient $X = \mathbf{A}^{n+m}$ et $Y = \mathbf{A}^n$. Consiérons la projection

$$p : X \to Y : (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}) = (a_1, \ldots, a_n).$$

Or pour tout $y \in Y$, $p^{-1}(y) = \{y\} \times Y$ et donc

$$\dim(p^{-1}(y)) = \dim(X) - \dim(Y).$$

5.3.2. Lemme. Soient $K \subseteq L \subseteq M$ des corps. Alors

$$\text{deg.tr. }_K M = \text{deg.tr. }_L M + \text{deg.tr. }_K L.$$

Démonstration. Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base de transcendance de L sur K et $\{v_1, \ldots, v_s\}$ est une base de transcendance de M sur L, alors $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ est une base de transcendance de M sur K.

5.3.3. Lemme. Soient X une variété affine irréductible de dimension $n > 0$ et $x \in X$. Alors il existe $\phi_1, \ldots, \phi_n \in K[X]$ tels que $x \in \mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ et $\dim \mathcal{Z}_X(\phi_1, \ldots, \phi_n) = 0$.

Démonstration. On peut supposer que X est un ensemble algébrique irréductible de $\mathbf{A}^m$. Comme $y \neq X$, il existe $f_1 \in \mathcal{I}(x) \backslash \mathcal{I}(X)$. Or y appartient à une composante irréductible X_1 de $\mathcal{Z}_X(f)$. Comme $f_1 \notin \mathcal{I}(X)$, $\dim(X_1) = n - 1$. Par récurrence, il existe $f_2, \ldots, f_n \in K[t_1, \ldots, t_m]$ tels que $x \in \mathcal{Z}_{X_1}(f_2, \ldots, f_n)$ et $\dim \mathcal{Z}_{X_1}(f_2, \ldots, f_n) = 0$. Mais $\mathcal{Z}_{X_1}(f_2, \ldots, f_n) = \mathcal{Z}_X(f_1, \ldots, f_n)$. Ce qui achève la démonstration.

5.3.4. Théorème. Soit $\phi : X \to Y$ un morphism dominant de variétés quasi-projectives irréductibles. Soient $\dim(X) = n$ et $\dim(Y) = m$.

(1) Si F est une composante irréductible de $\phi^{-1}(y)$ avec $y \in Y$, alors $\dim(F) \geq \dim(X) - \dim(Y)$.

(2) Il existe un ouvert non vide $U (\subseteq \phi(X))$ de Y tel que pour tout $y \in U$ et toute composnate irréductible Z de $\phi^{-1}(y)$, $\dim(Z) = n - m$.

Démonstration. Remplaçant Y par un voisinage affine, on peut supposer que Y est affine.

(1) Il existe $\phi_1, \ldots, \phi_m \in K[Y]$ tels que $Z = \mathcal{Z}_Y(\phi_1, \ldots, \phi_m) = \{y = y_1, y_2, \ldots, y_r\}$. Posons $U = Y \backslash \{y_2, \ldots, y_r\}$. Alors U est un voisinage de y et $\mathcal{Z}_U(\phi_1, \ldots, \phi_m) = U \cap Z = \{y\}$. Considérons le morphisme dominant $\psi : X \to U : x \mapsto \phi(x)$ et $\psi_i = \phi_i|_U \circ \psi \in K[X]$. Alors $x \in \mathcal{Z}_X(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ si et seulement si $\phi_i(\psi(x)) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$ si et seulement si $\psi(x) \in \mathcal{Z}_U(\phi_1, \ldots, \phi_m) = \{y\}$. Ainsi $\phi^{-1}(y) = \psi^{-1}(y) = \mathcal{Z}_X(\psi_1, \ldots, \psi_m)$. Par conséquent, $\dim(Z) \geq n - m$.

(2) Supposons que X est affine. Alors $\phi^* : K[Y] \to K[X]$ est un monomorphisme de K-algèbres. Ce qui induit un monomorphisme $\phi^* : K(Y) \to K(X)$ de corps. Posons $K[X] = K[v_1, \ldots, v_s]$ avec $s \geq n$ et $\phi^*(K[Y]) = K[u_1, \ldots, u_r]$ avec $r \geq m$, où $u_i = \phi^*(q_i) = q_i \circ \phi$ avec $q_i \in K[Y]$. Remarquons le degré de transcendance de $K(v_1, \ldots, v_s)$ sur $K(u_1, \ldots, u_r)$ est $n - m$. On peut supposer que $v_1, \ldots, v_{n-m}$ sont algèbriquement indépendants sur $K(u_1, \ldots, u_r)$. Alors il existe un polynôme non nul f_i sur K tel que

$$f_i(v_i\,;\ v_1, \ldots, v_{n-m}\,;\ u_1, \ldots, u_r) = 0, \quad i = n - m + 1, \ldots, s.$$

Pour tout $n - m < i \leq s$, on considère f_i un polynôme de $v_i, v_1, \ldots v_{n-m}$ sur $K[u_1, \ldots, u_r]$ dont le coefficient directeur est noté $g_i(u_1, \ldots, u_r)$. Alors $g_i(u_1, \ldots, u_r) = g_i(q_1, \ldots, q_r) \circ \phi,\ i =$

$n-m+1,\ldots,s$. Comme $g_i(u_1,\ldots,u_r)\neq 0$,, $U_i=\{y\in Y\mid (g_i(q_1,\ldots,q_r))(y)\neq 0\}$ est un ouvert non vide de Y pour tout $n-m<i\le s$. Comme Y est irréductible, $\cap_{i=1}^s U_i$ est non vide. Comme ϕ est dominant, $U=\phi(X)\cap\cap_{i=1}^s U_i$ est un ouvert non vide de Y.

On se fixe $y\in U$. Alors pour tous $n-m<i\le s$ et $x\in\phi^{-1}(y)$, posons

$$h_i(t_i\,;\,t_1,\ldots,t_{n-m})=f_i(t_i\,;\,t_1,\ldots,t_{n-m}\,;\,u_1(x),\ \ldots,u_r(x))=f_i(t_i\,;\,t_1,\ldots,t_{n-m}\,;\,q_1(y),\ \ldots,q_r(x)).$$

Alors le coefficient directeur de h_i est $g_i(q_1(y),\ldots,q_r(y))=(g_i(q_1,\ldots,q_r))(y)\neq 0$. Ainsi $h_i\neq 0$ pour tout $n-m<i\le s$

Posons $w_i=v_i|_{\phi^{-1}(y)},\ \ i=1,\ldots,s$. Comme X est affine et $\phi^{-1}(y)$ est un fermé de X,

$$K[\phi^{-1}(y)]=\{\theta|_{\phi^{-1}(y)}\mid\theta\in K[X]\}=K[w_1,\ldots,w_s].$$

Or pour tous $n-m<i\le s$ et $x\in\phi^{-1}(y)$,

$$\begin{aligned}(h(w_i\,;\,w_1,\ldots,w_{n-m}))(x)&=h(v_i(x)\,;\,v_1(x),\ldots,v_{n-m}(x))\\&=f_i(v_i(x)\,;\,v_1(x),\ldots,v_{n-m}(x)\,;\,u_i(x),\ldots,u_i(x))\\&=(f_i(v_i\,;\,v_1,\ldots,v_{n-m}\,;\,u_1,\ldots,u_r))(x)=0.\end{aligned}$$

Ainsi $h(w_i\,;\,w_1,\ldots,w_{n-m})=0$ pour tout $n-m<i\le s$, c'est-à-dire, $w_i,\,w_1,\ldots,w_{n-m}$ sont algébriquement dépendants sur K pour tout $n-m<i\le s$. Ainsi $\dim K[\phi^{-1}(y)]\le n-m$, c'est-à-dire, $\dim\phi^{-1}(y)\le n-m$. D'après (1), pour toute composante irréductible Z de $\phi^{-1}(y)$, $\dim(Z)=n-m$.

En général soit $X=V_1\cup\cdots\cup V_d$ avec les V_i des ouverts affines de X. Alors $\psi_i=\phi|_{V_i}:\ V_i\to Y$ est dominant avec $\dim(V_i)=n$. Soit U_i un ouvert de Y satisfait à (2). Or $U=U_1\cap\cdots\cap U_d$ est un ouvert non vide de Y. Soient $y\in U$ et Z une composante irréductible de $\phi^{-1}(y)$. Alors $Z\cap V_i$ est non vide pour un $1\le i\le d$. Or $\psi_i^{-1}(y)=\phi^{-1}(y)\cap V_i$ est un ouvert de $\phi^{-1}(y)$. Ainsi $\psi_i^{-1}(y)\cap Z=V_i\cap Z$ est un ouvert de Z ainsi qu'une composante irréductible de $\psi_i^{-1}(y)$. Par conséquent, $\dim(Z)=\dim(\psi^{-1}(y)\cap Z)=n-m$.

5.3.5. Définition. Soit T un espace topologique. Une fonction $f:T\to\mathbb{Z}$ est dite *supérieurement semi-continue* si pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\{x\in T\mid f(x)\ge n\}$ est un fermé de T.

5.3.6. Théorème. Soit $\phi:X\to Y$ un morphisme dominant de variétés quasi-projectives irréductibles. Alors la fonction

$$f:x\mapsto\dim(\phi^{-1}(\phi(x))$$

est supérieurement semi-continue.

Démonstration. Soient $\dim(X) = n$ et $\dim(Y) = m$. Le résultat est trivialement valide si $n = 0$. Posons $X_i = \{x \in X \mid f(x) \geq i\}$. Soit U l'ouvert satisfait à (2) du théorème précédent. Alors $Z = \phi^{-1}(Y \backslash U)$ est un fermé de X avec $\dim(Z) < \dim(X)$. Si $i \leq n - m$, alors $X_i = X$ est femé. Or si $i > n - m$, alors $X_i \subseteq Z$.

Soient $Y_1, \ldots, Y_s$ les composantes irréductibles de $Y \backslash U$. Alors $Z_1 = \phi^{-1}(Y_1), \ldots, Z_s = \phi^{-1}(Y_s)$ sont les composantes irréductibles de Z. Considérons $\phi_j = \phi|_{Z_j} : Z_j \to Y_j$. Alors

$$\{x \in Z_j \mid \dim(\phi_j^{-1}(\phi_j(x)) \geq i\} = X_i \cap Z_j$$

est un fermé de Z_j et donc un fermé de X. Or $X_i = (X_i \cap Z_1) \cup \cdots \cup (X_i \cap Z_s)$ est un fermé de X.