REVÊMENTS DE GALOIS DES CATÉGORIES LINÉAIRES

Introduction

En topologie, on utilise les revêtements pour étudier les espaces topologiques.

Dans les années 80, cette notion a été introduite par Bongartz-Gabriel aux catégories linéaires localement bornées pour étudier les représentations des algèbres.

Cela est récemment généralisée par Asashiba et par Bautista-Liu aux catégories linéaires générales pour étudier les catégories dérivées des algèbres.

Grosso modo, un revêtement galoisien d'algèbres $\pi : \tilde{A} \to A$ induit un diagramme commutatif de foncteurs:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}\tilde{A} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_\lambda"] & D^b(\mathrm{mod}\tilde{A}) \arrow[d, "\pi_\lambda^D"] \\ \mathrm{mod}A \arrow[r] & D^b(\mathrm{mod}A) \end{tikzcd} .$$

La question est quand π_λ et π_λ^D sont aussi des revêtements galoisiens.

1. Revêtements galoisiens de carquois

1.1. Definition. Un carquois Q est donné par un couple (Q_0, Q_1), où

(1) Q_0 est un ensemble de points;

(2) Q_1 est un ensemble de flèches entre des points $\alpha : x \to y$, où x s'appelle *source* de α noté $s(\alpha)$; et y, *but* de α noté $b(\alpha)$.

Exemple.

(1)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\alpha"] & y \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & z \end{tikzcd}$$

1.2. Definition. Soit Q un carquois.

(1) Une suite de n flèches consécutives

$$p: \quad x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} y$$

s'appelle *chemin de longueur n*. Dans ce cas, on écrit $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$; et $x = s(p)$ et $y = b(p)$.

(2) À $x \in Q_0$, on associe *chemin trivial* ε_x de longueur 0 avec $s(\varepsilon_x) = b(\varepsilon_x) = x$.

1.3. Definition. Soit Q un carquois. Étant donnés deux chemins

$$p: \quad x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} y$$

et

$$q: \quad y \xrightarrow{\beta_1} y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_{m-1} \xrightarrow{\beta_m} z,$$

(1) On définit *chemin composé* de p, q, noté pq, comme étant le chemin suivant

$$x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} y \xrightarrow{\beta_1} y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_{m-1} \xrightarrow{\beta_m} z.$$

(2) En outre, on définit

$$\varepsilon_x p = p = p\varepsilon_y \text{ et } \varepsilon_x = \varepsilon_x \varepsilon_x.$$

Exemple. (1) Considérons le carquois

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Les chemins sont $\varepsilon_x, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots, .$

(2) Considérons le carquois

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & y \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & z \end{tikzcd}$$

Les chemins sont

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma.$$

Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois. Si $x, y \in Q_0$, alors $Q_1(x, y)$ désigne l'ensemble des flèches $\alpha : x \to y$.

1.4. Definition. Soient $Q = (Q_0, Q_1)$ et $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ deux carquois.

(1) Un *morphisme de carquois* $\varphi : Q \to \Gamma$ se compose de deux applications

$$\varphi_0 : Q_0 \to \Gamma_0 : x \mapsto \varphi_0(x)$$

et

$$\varphi_1 : Q_1 \to \Gamma_1 : \alpha \mapsto \varphi_1(\alpha)$$

telles que

$$\varphi_1(Q_1(x, y)) \subseteq \Gamma_1(\varphi_0(x), \varphi_0(y)), \text{ pour tous } x, y \in Q_0.$$

(2) Un morphisme $\varphi : Q \to \Gamma$ est un *isomorphisme* si φ_0 et φ_1 sont bijectives.

(3) Un isomorphisme $\varphi : Q \to Q$ s'appelle *automorphisme*.

Remarque. L'action d'un morphisme $\varphi : Q \to \Gamma$ s'étend sur tous le chemins de Q de sorte que

(1) $\varphi(\varepsilon_x) = \varepsilon_{\phi_0(x)}$, pour tout $x \in Q_0$;

(2) si $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ avec $\alpha_i \in Q_1$, alors $\varphi(p) = \varphi(\alpha_1) \cdots \varphi(\alpha_n)$.

EXEMPLE. (1) Le morphisme identité

$$1_Q : Q \to Q : x \mapsto x; \alpha \mapsto \alpha$$

est un automorphisme de Q.

(2) Considérons les carquois suivants:

$$\mathbb{A}_\infty^\infty : \qquad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$

et

$$Q : \qquad \alpha \circlearrowright x$$

En posant

$$\pi_0 : (\mathbb{A}_\infty^\infty)_0 \to Q_0 : x_i \mapsto x$$

et

$$\pi_1 : (\mathbb{A}_\infty^\infty)_1 \to Q_1 : \alpha_i \mapsto \alpha,$$

on obtient un morphisme de carquois $\pi : \mathbb{A}_\infty^\infty \to Q$ tel que

$$\pi(\alpha_i \cdots \alpha_{i+n}) = \alpha^n,$$

pour tous $i, n \in \mathbb{Z}$ avec $n > 0$.

Par contre, il n'a y pas de morphisme $Q \to \mathbb{A}_\infty^\infty$.

1.5. LEMMA. *Si Q est un carquois, alors ses automorphismes forment un groupe noté* $\operatorname{Aut}(Q)$.

1.6. DEFINITION. Soient Q un carquois et G un groupe. Une *G-action* sur Q est un homomorphisme de groupes $\rho : G \to \operatorname{Aut}(Q)$. Dans ce cas, pour tout $g \in G$, on a $\rho(g) = (\rho(g)_0, \rho(g)_1)$, et on pose

(1) $g \cdot x = \rho(g)_0(x)$, pour tout $x \in Q_0$;
(2) $g \cdot \alpha = \rho(g)_1(\alpha)$, pour tout $\alpha \in Q_1$.

Cette action est dite *libre* si, pour tous $g \in G$ non-identité et $x \in Q_0$, on a

$$g \cdot x \neq x.$$

EXEMPLE. Considérons le carquois suivant:

$$\mathbb{A}_\infty^\infty : \qquad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\rho_n : \mathbb{A}_\infty^\infty \to \mathbb{A}_\infty^\infty : x_i \mapsto x_{i+n}; \alpha_i \mapsto \alpha_{i+n},$$

Il est évident que

$$\rho : \mathbb{Z} \to \operatorname{Aut}(\mathbb{A}_\infty^\infty)$$

est un homomorphisme de groupes. Ceci donne une $\mathbb{Z}$-action sur $\mathbb{A}_\infty^\infty$. Cette action est libre. En effet, si $n \neq 0$, alors

$$n \cdot x_i = \rho_n(x_i) = x_{n+i} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Soit Q un carquois. Pour tout $x \in Q_0$, on désigne par x^+ l'ensemble des flèches de source x; et par x^- l'ensemble des flèches de but x. On dit que Q est *localement fini* si x^+ et x^- sont finis, pour tout $x \in Q_0$.

1.7. Definition. Soit $\tilde{Q}$ un carquois muni d'une action libre d'un groupe G. Un morphisme de carquois
$$\pi : \tilde{Q} \to Q$$
s'appelle un *G-revêtement galoisien* si les conditions suivantes sont vérifiées.
(1) L'application $\pi_0 : \tilde{Q}_0 \to Q_0$ est surjective.
(2) Pour tous $g \in G$ et $u \in \tilde{Q}_0 \cup \tilde{Q}_1$, on a $\pi(g \cdot u) = \pi(u)$.
(3) Si $x, y \in \tilde{Q}_0$ avec $\pi_0(x) = \pi_0(y)$, alors $y = g \cdot x$ pour certain $g \in G$.
(4) Si $x \in \tilde{Q}_0$, alors π_1 induit deux bijections $x^+ \to \pi_0(x)^+$ and $x^- \to \pi_0(x)^-$.

Remnarque. Pour tout $u \in Q_0 \cup Q_1$, d'après la Définition 1.7, $\pi^-(u)$ est une G-orbite de $\tilde{Q}$.

Exemple. (1) Considérons le morphisme $\pi : \mathbb{A}_\infty^\infty \to Q$, où
$$\mathbb{A}_\infty^\infty : \qquad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$
et
$$\begin{tikzcd} Q : & x \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$
Si $\mathbb{A}_\infty^\infty$ est muni de la $\mathbb{Z}$-action ci-haut mentionnée, alors π est un $\mathbb{Z}$-revêtement galoisien.

(2) Considérons le carquois $\tilde{Q}$:
$$\begin{tikzcd}
 & x_{-1} \arrow[ddl, "\gamma_{-1}"'] \arrow[dr, "\alpha_{-1}"] & & & x_0 \arrow[ddl, "\gamma_0"'] \arrow[dr, "\alpha_0"] & & & x_1 \arrow[ddl, "\gamma_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \\
\cdots & & y_{-1} \arrow[dr, "\beta_{-1}"] & & & y_0 \arrow[dr, "\beta_0"] & & & y_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \cdots \\
z_{-2} & & & z_{-1} & & & z_0 & & & z_1
\end{tikzcd}$$
et le carquois Q:
$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
 & y \arrow[dl, "\beta"] \\
z &
\end{tikzcd}$$
On munit $\tilde{Q}$ une $\mathbb{Z}$-action telle que
$$n \cdot u_i = u_{i+1}, \text{ pour tous } u \in \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\}; i \in \mathbb{Z}.$$
Alors on a un $\mathbb{Z}$-revêtement galoisien comme suit:
$$\pi : \tilde{Q} \to Q : u_i \mapsto u, \text{ où } u \in \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\}.$$

(3) Considerons les carquois suivants:
$$\mathbb{A}_\infty : \qquad x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots$$
et
$$\begin{tikzcd} Q : & x \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$
Alors on n'a aucun revêtement galoisien $\mathbb{A}_\infty \to Q$.

2. Catégories linéaires

On se fixe k un corps.

2.1. Definition. Une catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$ est la donnée
(1) d'une classe d'objets, notée $\mathcal{C}_0$;
(2) de k-espaces de morphismes $\mathcal{C}(X,Y)$, pour $X,Y \in \mathcal{C}_0$;
(3) d'une composition de morphismes

$$\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z) : (f,g) \mapsto f \cdot g,$$

pour tous $X,Y,Z \in \mathcal{C}_0$, qui est unitaire, associative, et k-bilinéaire.

Exemple. On a deux catégories k-linéaires suivantes:
(1) Mod-k: les objets sont les k-espaces vectoriels, les morphismes sont les applications k-linéaires, avec la composition usuelle.
(2) mod-k: les objets sont les k-espaces vectoriels de dimension finie et les morphismes sont les applications k-linéaires, avec la composition usuelle.

2.2. Definition. Soit Q un carquois. La *catégorie des chemines* de Q sur k, notée kQ, est la catégorie k-linéaire telle que définie ci-dessous:
(1) Les objets de kQ sont les points de Q.
(2) Si $x,y \in Q_0$, alors $(kQ)(x,y)$ est le k-espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des chemins de x vers y.
(3) La composition des morphisms est induite de la composition des chemines de sorte que, pour tous chemins p,q, on a

$$p \cdot q = \begin{cases} pq, & \text{si} \quad b(p) = s(q); \\ 0, & \text{si} \quad b(p) \neq s(q). \end{cases}$$

Exemple. (1) Considérons le carquois

$$Q : \quad \alpha \circlearrowright x.$$

Alors kQ a un seul objet x et $\mathrm{End}_{kQ}(x) = k[\alpha]$, l'anneau des polynômes en α.
(2) Considérons le carquois

$$\mathbb{A}_\infty : \quad x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots$$

Alors kQ a pour objets x_i, avec $i \geq 0$; et

$$(kQ)(x_i,x_j) = \begin{cases} k < \varepsilon_{x_i} >, & \text{si } i = j; \\ k < \alpha_i \cdots \alpha_j >, & \text{si } i < j; \\ 0, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

2.3. Definition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire. Un *idéal* I de $\mathcal{C}$ se compose de sous-espaces $I(X,Y)$ de $\mathcal{C}(X,Y)$, pour $X,Y \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$, tels que

$$f \in \mathcal{C}(X',X), g \in I(X,Y), h \in \mathcal{C}(Y,Y') \Rightarrow fgh \in I(X',Y').$$

Dans ce cas, la *catégorie quotient* $\mathcal{C}/I$ est définie comme suit:
(1) $(\mathcal{C}/I)_0 = \mathcal{C}_0$.
(2) $(\mathcal{C}/I)(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)/I(X,Y)$ pour tous $X,Y(\mathcal{C}/I)_0$.

(3) Si $\bar{f} \in (\mathcal{C}/I)(X,Y)$ et $\bar{g} \in (\mathcal{C}/I)(Y',Z)$, alors
$$\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}.$$

2.4. Definition. Une catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$ est dite *localement bornée* si, pour tout $X, Y \in \mathcal{C}_0$, les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est une algèbre locale.
(2) Les k-espaces $\oplus_{Z \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(Z,X)$ et $\oplus_{Z \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(X,Z)$ sont de dimension finie.
(3) $X \cong Y \Rightarrow X = Y$.

En outre, $\mathcal{C}$ est dite *bornée* si elle est localement bornée et $\mathcal{C}_0$ est fini.

2.5. Definition. Soit Q un carquois. Un idéal I de kQ est dite *admissible* si les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) I se compose de combinaisons linéaires de chemins de longueur > 1.
(2) Pour tout $x \in Q_0$, il existe un entier $n_x > 0$ tel que I contient tous les chemins de longueur $\geq n_x$ dont x est la source ou le but.

Dans ce cas, on appelle (Q, I) un *carquois lié*.

2.6. Proposition. *Soit Q un carquois localement fini. Si I est un idéal admissible de kQ, alors kQ/I est localement bornée.*

Exemple. Considérons kQ, où Q est le carquois suivant:

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[loop left, "\sigma"] \arrow[r, "\alpha_0"] & x_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & x_2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Pour tous $0 \leq i \leq j$, désignons par p_{ij} le chemin de x_i vers x_j, ne contenant pas σ. On a alors un idéal admissible I de kQ défini par

$$I(x_i, x_j) = \begin{cases} k < p_{ij}\sigma^n, n = 2, 3, \ldots, >, & \text{si } 0 = i \leq j; \\ k < p_{ij} >, & \text{si } 0 < i < j - 1; \\ 0, & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Considérons la catégorie quotient kQ/I. Pour abus de notation, les morphismes $\bar{f}$ de kQ/I sont simplement notés f, mais liés par les relations $u = 0$, avec $u \in I$. Ainsi

$$(kQ/I)(x_i, x_j) = \begin{cases} k < \varepsilon_{x_0}, \sigma >, & \text{si } 0 = i = j; \\ k < \alpha_1, \alpha_1\sigma >, & \text{si } (i,j) = (0,1); \\ k < \varepsilon_{x_i} >, & \text{si } 0 < i = j; \\ k < \alpha_i >, & \text{si } 0 < i < i + 1 = j; \\ 0, & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

lié par les relations $\sigma^2 = 0$ et $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0$, pour tout $i \geq 0$.

2.7. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire. Si $\mathcal{C}_0$ est fini, alors*
$$\mathscr{A}(\mathcal{C}) = \oplus_{X, Y \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(X, Y)$$

est une k-algèbre, dont la multiplication est induite de la composition de morphismes de sorte que, pour $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z$, on a

$$fg = \begin{cases} f \cdot g, & si \quad Y = Y'; \\ 0, & si \quad Y \neq Y'. \end{cases}$$

En outre, $\mathscr{A}(\mathcal{C})$ est de dimension finie si et seulement si $\mathcal{C}$ est bornée.

2.8. Definition. Si Q est un carquois avec Q_0 fini, alors $\mathscr{A}(kQ)$ s'appelle *algèbre des chemins* de Q, notée $k[Q]$.

Remarque. $k[Q]$ a pour k-base l'ensemble des chemins dans Q.

Example. Soit Q le carquois suivant:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & y \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & z \end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{aligned} k[Q] &= k < \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma > \\ &= \{a_1\varepsilon_x + a_2\varepsilon_y + a_3\varepsilon_z + a_4\alpha + a_5\beta + a_6\gamma + a_7\alpha\beta + a_8\alpha\gamma \mid a_i \in k\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on a le résultat suivant.

2.9. Proposition. *Si A est une k-algèbre sobre de dimension finie, alors on a une catégorie k-linéaire bornée $\mathscr{C}(A)$ définie comme suit:*

(1) *$\mathscr{C}(A)_0 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A.*
(2) *$\mathscr{C}(A)(e_i, e_j) = e_iAe_j$, pour $1 \leq i, j \leq n$.*
(3) *La composition des morphismes est induite de la multiplication de A.*

Dans ce cas, $A = \mathscr{A}(\mathscr{C}(A))$.

Remarque. Une k-algèbre sobre de dimension finie n'est rien qu'une catégorie k-linéaire bornée. Plus généralement, on travaillera avec des catégories k-linéaire localement bornées.

3. Revêtements galoisiens de catégories k-linéaires

Par tout dans cette section, on se fixe $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories k-linéaires, et G un groupe.

3.1. Definition. Un foncteur k-linéaire $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est définie par la donnée

(1) d'un objet $F(x) \in \mathcal{D}_0$, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$;
(2) d'une application k-linéaire
$$F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y)) : f \mapsto F_{X,Y}(f) := F(f).$$
pour tout $(X, Y) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$.
(3) $F(1_X) = 1_{F(X)}$, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$.
(4) $F(fg) = F(f)F(g)$ pour tous $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

3.2. Proposition. *Tout morphisme de carquois $\varphi : Q \to \Gamma$ s'étend, par la k-bilinéarité, à un foncteur k-linéaire $\varphi : kQ \to k\Gamma$ entre les catégories des chemins.*

3.3. Definition. Soient $E, F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs k-linéaires. Un morphisme fonctoriel $\eta : E \to F$ se compose de morphismes $\eta_X : E(X) \to F(X)$ de $\mathcal{D}$, où $X \in \mathcal{C}_0$, tels que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} E(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "E(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ E(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

3.4. Definition. Un foncteur k-linéaire $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ s'appelle *automorphisme* s'il existe un foncteur k-linéaire $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tels que $E \circ F = F \circ E = 1_{\mathcal{C}}$.

Exemple. Le foncteur identité

$$1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} : x \mapsto X; f \mapsto f$$

est un automorphisme k-linéaire de $\mathcal{C}$.

3.5. Lemma. *Les automorphismes de $\mathcal{C}$ forment un groupe, noté* $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$.

3.6. Definition. Une *G-action* sur $\mathcal{C}$ est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}).$$

Dans ce cas, pour tout $g \in G$, on écrit

(1) $g \cdot X = \rho(g)(X)$, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$;
(2) $g \cdot f = \rho(g)(f)$, pour tout morphisme $f \in \mathcal{C}$.

3.7. Definition. Soit $\mathcal{C}$ munie d'une G-action. Un idéal I de $\mathcal{C}$ est dit *G-stable* si $g \cdot f \in I$, pour tous $g \in G$ et $f \in I$.

On désigne par $\mathrm{ind}\, \mathcal{C}$ la classe des objects indécomposables de $\mathcal{C}$.

3.8. Definition. Une G-action sur $\mathcal{C}$ est dite *admissible* si, pour tous $X, Y \in \mathrm{ind}\, \mathcal{C}$, les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) $g \cdot X \ncong X$, pour tout $g \in G$ non-identité.
(2) $\mathcal{C}(X, g \cdot Y) \neq 0$ pour au plus un nombre fini de $g \in G$.

3.9. Proposition. *Soit Q un carquois lié localement fini muni d'une G-action libre, et soit I un idéal admissible de kQ. Si I est G-stable, alors la G-action sur Q induit une G-action admissible sur kQ/I.*

3.10. Definition. Soit $\mathcal{C}$ munie d'une G-action admissible. Un foncteur k-linéaire $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'appelle *G-revêtement galoisien* si les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) Si $M \in \mathcal{D}$, alors $M \in \mathrm{ind}\, \mathcal{D}$ si et seulement si $M \cong F(X)$ pour un certain $X \in \mathrm{ind}\, \mathcal{C}$.
(2) Si $X, Y \in \mathrm{ind}\, \mathcal{C}$, alors $F(X) \cong F(Y)$ si et seulement si $Y = g \cdot X$ pour un certain $g \in G$.

(3) Pour tous $X, Y \in \mathcal{C}_0$, le foncteur F induit deux isomorphismes

$$F_{X,Y} : \qquad \oplus_{g\in G}\, \mathcal{C}(X, g\cdot Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(F(X), F(Y))$$

et

$$F^{X,Y} : \qquad \oplus_{g\in G}\, \mathcal{C}(g\cdot X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(F(X), F(Y)).$$

3.11. Theorem. *Soit (Q, I) un carquois lié localement fini, et soit $\pi : \tilde{Q} \to Q$ un G-revêtement galoisien de carquois. Alors*

(1) *$\tilde{I} = \pi^-(I)$ est un idéal admissible et G-stable de $k\tilde{Q}$.*
(2) *$\tilde{Q}/\tilde{I}$ est localement bornée et munie d'une G-action admissible.*
(3) *Le G-revêtement galoisien de carquois $\pi : \tilde{Q} \to Q$ induit un G-revêtment galoisien de catégories k-linéaires*

$$\pi : k\tilde{Q}/\tilde{Q} \to kQ/I.$$

Exemple. On a vu un $\mathbb{Z}$-revêtement galoisien de carquois

$$\pi : \tilde{Q} \to Q : u_i \mapsto u, \text{ où } u \in \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\},$$

où $\tilde{Q}$ est le carquois

$$\begin{tikzcd}
& x_{-1} \arrow[ddl, "\gamma_{-1}"'] \arrow[dr, "\alpha_{-1}"] & & & x_0 \arrow[ddl, "\gamma_0"'] \arrow[dr, "\alpha_0"] & & & x_1 \arrow[ddl, "\gamma_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \\
\cdots & & y_{-1} \arrow[dr, "\beta_{-1}"] & & & y_0 \arrow[dr, "\beta_0"] & & & y_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \cdots \\
z_{-2} & & & z_{-1} & & & z_0 & & & z_1
\end{tikzcd}$$

et Q est le carquois:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\gamma"'] & \\
& y \arrow[dl, "\beta"] \\
z &
\end{tikzcd}$$

Considérons $I =< \alpha\beta >$, un idéal admissible de kQ. Alors

$$\tilde{I} = \pi^-(I) =< \alpha_i\beta_i \mid i \in \mathbb{Z} >$$

est un idéal admissible de $k\tilde{Q}$, et on a un $\mathbb{Z}$-revêtement de catégories k-linéaires localement bornées

$$\pi : k\tilde{Q}/\tilde{I} \to kQ/I.$$

4. Catégorie de modules

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie k-linéaire localement bornée.

4.1. Definition. Un $\mathcal{C}$-module à droite est un foncteur k-linéaire $M : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}k$. Un tel module M est dit de *dimension finie* si $\sum_{X\in\mathcal{C}} \dim M(X) < \infty$.

Notation. On désigne par $\mathrm{mod}\,\mathcal{C}$ la catégorie k-linéaire dont les objets sont les $\mathcal{C}$-modules à droite de dimension finie, les morphismes sont les morphismes fonctoriels, avec la composition usuelle.

4.2. Proposition. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie k-linéaire bornée, alors il existe équivalence*

$$\Phi : \mathrm{mod}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{mod}\,\mathscr{A}(\mathcal{C}) : M \mapsto \oplus_{X\in\mathcal{C}_0} M(X),$$

où $\mathscr{A}(\mathcal{C})$ est la k-algèbre associée à $\mathcal{C}$.

4.3. Proposition. *Soit $\Lambda = kQ/I$, où (Q, I) est un carquois lié. Supposons que $I =< \rho_1, \dots, \rho_n >$, avec $\rho_i \in kQ$.*

(1) *Un objet M de $\mathrm{mod}\Lambda$ se compose*
   1) *d'objets $M(x) \in \mathrm{mod}k$, avec $x \in Q_0$;*
   2) *de morphismes $M(\alpha) : M(x) \to M(y)$ de $\mathrm{mod}k$, avec $\alpha : x \to y \in Q_1$.*
   tels que $M(\rho_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

(2) *Un morphisme $f : M \to N$ de $\mathrm{mod}\Lambda$ se compose d'applications linéaires $f(x) : M(x) \to N(x)$, avec $x \in Q_0$, telles que, pour toute $\alpha : x \to y \in Q_1$,*

$$\begin{tikzcd} M(x) \arrow[r, "M(\alpha)"] \arrow[d, "f(x)"'] & M(y) \arrow[d, "f(y)"] \\ N(x) \arrow[r, "N(\alpha)"] & N(y) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Exemple. Considérons $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$, où $\tilde{Q}$ est le carquois suivant lié par les relations $\alpha_i\beta_i = 0$, $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & x_{-1} \arrow[ddl, "\gamma_{-1}"] \arrow[dr, "\alpha_{-1}"] & & & x_0 \arrow[ddl, "\gamma_0"'] \arrow[dr, "\alpha_0"] & & & x_1 \arrow[ddl, "\gamma_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & & \\ \cdots & & y_{-1} \arrow[dr, "\beta_{-1}"] & & & y_0 \arrow[dr, "\beta_0"] & & & y_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & & \cdots \\ z_{-2} & & & z_{-1} & & & z_0 & & & z_1 & \end{tikzcd}$$

Pour tout $a \in \tilde{Q}_0$, on pose

$$M(a) = \begin{cases} k < a >, & \text{si } a \in \{z_0, x_1, y_1\}; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et pour tout $\alpha \in \tilde{Q}_0$, on pose

$$M(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in \{\gamma_1, \alpha_1\}; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

Comme $M(\alpha_i\beta_i) = 0$, $i \in \mathbb{Z}$, on voit que M est un Λ-module à droite. On représente M simplement par le sous-carquois suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & k < x_1 > \arrow[dl, "1"'] \arrow[r, "1"] & k < y_1 > \\
k < z_0 > & &
\end{tikzcd}$$

Par contre, si l'on pose

$$N(a) = \begin{cases} k < a >, & \text{si } a \in \{z_0, x_1, y_1, z_1\}; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et

$$N(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in \{\gamma_1, \alpha_1, \beta\}; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

Comme $M(\alpha_1\beta_1) \neq 0$, $i \in \mathbb{Z}$, on voit que N n'est pas un Λ-module à droite.

4.4. Definition. Si $\mathcal{C}$ est munie d'une action d'un groupe G, alors cette action induit une G-action sur mod$\mathcal{C}$ telle que, pour tout $g \in G$,

(1) pour tout module M, on a $g \cdot M = M \circ g^{-1}$;

(2) pour tout morphisme $f : M \to N$, le morphism $g \cdot f : g \cdot M \to g \cdot N$ est défini, pour $x \in \mathcal{C}_0$, par

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) : M(g^{-1} \cdot x) \to N(g^{-1} \cdot x).$$

4.5. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ munie d'une action admissible d'un groupe G. Si G est sans torsion, alors la G-action sur* mod$\,\mathcal{C}$ *est admissible.*

5. Foncteur d'abaissement

Soit $\Lambda = kQ/I$, avec (Q, I) carquois lié localement fini. On fixe un G-revêtement galoisien de carquois

$$\pi : \tilde{Q} \to Q,$$

où G est sans torsions et $\tilde{Q}$ est localement fini. Alors $\tilde{I} = \pi^{-}(I)$ est un idéal admissible et G-stable de $k\tilde{Q}$ tel que

$$\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$$

est localement bornée ayant une G-action admissible. En outre, le revêtement galoisien de carquois $\pi : \tilde{Q} \to Q$ induit un G-revêtement galoisien de catégories linéaires

$$\pi : \tilde{\Lambda} \to \Lambda.$$

La stratégie est de rélier mod$\tilde{\Lambda}$ et modΛ. D'abord, la G-action admissible sur $\tilde{\Lambda}$ induit une G-action admissible sur mod$\tilde{\Lambda}$, et Bongartz et Gabreil ont construit le *foncteur d'abaissement*

$$\pi_\lambda : \text{mod}\tilde{\Lambda} \to \text{mod}\Lambda.$$

En effet, étant donné un $\tilde{\Lambda}$-module M, on définira $\pi_\lambda(M) \in \text{mod}\Lambda$ de la faccon suivante.

Pour tout $a \in Q_0$, on pose

$$\pi_\lambda(M)(a) = \oplus_{x \in \pi^-(a)} M(x),$$

où $\pi^-(a) = \{x \in \tilde{Q}_0 \mid \pi^-(x) = a\}$ est une G-orbite.

Soit $\alpha : a \to b \in Q_1$. Pour tout $x \in \pi^-(a)$, il existe unique $\alpha_x : x \to y \in \pi^-(\alpha)$. En particulier, $y \in \pi^-(b)$ et $M(\alpha_x) : M(x) \to M(y)$. Supposons que $x' \in \pi^-(a)$ et $\alpha_{x'} : x' \to y' \in \pi^-(\alpha)$. Si $x' \neq x$, alors $y \neq y'$. Ainsi, on pose

$$\pi_\lambda(M)(\alpha) = \oplus_{x \in \pi^-(a)} M(\alpha_x) : \oplus_{x \in \pi^-(a)} M(x) \to \oplus_{y \in \pi^-(b)} M(y).$$

Comme M s'annule sur $\tilde{I}$, on voit que $\pi_\lambda(M)$ s'annule sur I. C'est-à-dire, $\pi_\lambda(M)$ est un Λ-module.

Exemple. Considérons le $\mathbb{Z}$-revêtement galoisien

$$\pi : k\tilde{Q} \to kQ,$$

où $\tilde{Q}$ est le carquois sans relations:

$$\begin{tikzcd}
 & x_{-1} \arrow[ddl, "\gamma_{-1}"'] \arrow[dr, "\alpha_{-1}"] & & & x_0 \arrow[ddl, "\gamma_0"'] \arrow[dr, "\alpha_0"] & & & x_1 \arrow[ddl, "\gamma_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \\
\cdots & & y_{-1} \arrow[dr, "\beta_{-1}"] & & & y_0 \arrow[dr, "\beta_0"] & & & y_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \cdots \\
z_{-2} & & & z_{-1} & & & z_0 & & & z_1
\end{tikzcd}$$

et Q est le carquois sans relations suivant:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\gamma"'] & \\
 & y \arrow[dl, "\beta"] \\
z &
\end{tikzcd}$$

Considérons le $k\tilde{Q}$-module M suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & k < x_0 > \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & & & k < x_1 > \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & & \\
 & & k < y_0 > \arrow[dr, "1"] & & & k < y_1 > \arrow[dr, "1"] & \\
k < z_{-1} > & & & k < z_0 > & & & k < z_1 >
\end{tikzcd}$$

Alors $\pi_\lambda(M)$ est le kQ-module suivant:

$$\begin{tikzcd}
k<x_0,x_1> \arrow[dr, "\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}"'] & \\
& k<y_0,y_1> \arrow[dl, "\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}"] \\
k<z_{-1},z_0,z_1> &
\end{tikzcd}$$

5.1. Theorem. *Le foncteur* $\pi_\lambda : \mathrm{mod}\tilde{\Lambda} \to \mathrm{mod}\Lambda$ *a des propriétés suivantes.*

(1) *Si* $M, N \in \mathrm{ind}\tilde{\Lambda}$, *alors* $\pi_\lambda(M), \pi_\lambda(N) \in \mathrm{ind}\Lambda$, *et*

$$\pi_\lambda(M) \cong \pi_\lambda(N) \Leftrightarrow N \cong g \cdot M, \text{ pour un certain } g \in G.$$

(2) *Pour tous* $M, N \in \mathrm{mod}\tilde{\Lambda}$, *le foncteur* π_λ *induit deux isomorphismes*

$$\oplus_{g\in G} \mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(M, g\cdot N) \xrightarrow{\quad\cong\quad} \mathrm{Hom}_\Lambda(\pi_\lambda(M), \pi_\lambda(N))$$

et

$$\oplus_{g\in G} \mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(g\cdot M, N) \xrightarrow{\quad\cong\quad} \mathrm{Hom}_\Lambda(\pi_\lambda(M), \pi_\lambda(N)).$$

(3) π_λ *est un* G*-revêtement galoisien* $\Leftrightarrow$ *il est dense.*

On dit que Λ est *localement de représentation-finie* si, pour tout $x \in Q_0$, il existe au plus un nombre fini de $M \in \mathrm{ind}\Lambda$ tel que $M(x) \neq 0$.

5.2. Theorem. *Si* Λ *est localement de représentation-finie, alors*

$$\pi_\lambda : \mathrm{mod}\tilde{\Lambda} \to \mathrm{mod}\Lambda$$

est un G*-revêtement galoisien de catégories* k*-linéaires, et il induit un* G*-revêment galoisien de carquois à translation*

$$\pi_\lambda : \Gamma_{\tilde{\Lambda}} \to \Gamma_\Lambda$$

entre les carquois d'Auslander-Reiten.

Exemple. Considérons le $\mathbb{Z}$-revêtement galoisien

$$\pi : k\tilde{Q} \to kQ,$$

où

$$\tilde{Q}: \qquad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \qquad \tilde{I} =< \alpha_i\alpha_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z} > .$$

et

$$Q: \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad I =< \alpha^2 >$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de $k\tilde{Q}$ est le suivant:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & x_2x_3 \arrow[dr] & & & & x_0x_1 \arrow[dr] & & & \\
\cdots & x_3 \arrow[ur] & & x_2 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & & x_1 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & x_0 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & & \cdots \\
x_3x_4 \arrow[ur] & & & & x_1x_2 \arrow[ur] & & & & x_{-1}x_0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de kQ est le suivant:

$$\begin{tikzcd}
x^2 \arrow[d, bend left] \\
x \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

où x^2 est le kQ-module suivant:

$$\begin{tikzcd}
x^2 \arrow[loop left, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}$$