

REVÊTEMENTS DE GALOIS DES CATÉGORIES LINÉAIRES

INTRODUCTION

En topologie, on utilise les revêtements pour étudier les espaces topologiques.

Dans les années 80, cette notion a été introduite par Bongartz-Gabriel aux catégories linéaires localement bornées pour étudier les représentations des algèbres.

Cela est récemment généralisée par Asashiba et par Bautista-Liu aux catégories linéaires générales pour étudier les catégories dérivées des algèbres.

Grosso modo, un revêtement galoisien d'algèbres $\pi : \tilde{A} \rightarrow A$ induit un diagramme commutatif de foncteurs:

$$\begin{array}{ccc} \text{mod}\tilde{A} & \longrightarrow & D^b(\text{mod}\tilde{A}) \\ \downarrow \pi_\lambda & & \downarrow \pi_\lambda^D \\ \text{mod}A & \longrightarrow & D^b(\text{mod}A) \end{array}$$

La question est quand π_λ et π_λ^D sont aussi des revêtements galoisiens.

1. REVÊTEMENTS GALOISIENS DE CARQUOIS

1.1. DEFINITION. Un carquois Q est donné par un couple (Q_0, Q_1) , où

- (1) Q_0 est un ensemble de points;
- (2) Q_1 est un ensemble de flèches entre des points $\alpha : x \rightarrow y$, où x s'appelle *source* de α noté $s(\alpha)$; et y , *but* de α noté $b(\alpha)$.

EXEMPLE.

(1)

$$\alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ x \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha & & \gamma & \\ x & \xrightarrow{\quad} & y & \xrightarrow{\quad} & z \\ & \beta & & \delta & \end{array}$$

1.2. DEFINITION. Soit Q un carquois.

- (1) Une suite de n flèches consécutives

$$p : x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} y$$

s'appelle *chemin de longueur n* . Dans ce cas, on écrit $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$; et $x = s(p)$ et $y = b(p)$.

- (2) À $x \in Q_0$, on associe *chemin trivial* ε_x de longueur 0 avec $s(\varepsilon_x) = b(\varepsilon_x) = x$.

1.3. DEFINITION. Soit Q un carquois. Étant donnés deux chemins

$$p : x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} y$$

et

$$q : y \xrightarrow{\beta_1} y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_{m-1} \xrightarrow{\beta_m} z,$$

(1) On définit *chemin composé* de p, q , noté pq , comme étant le chemin suivant

$$x \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} y \xrightarrow{\beta_1} y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_{m-1} \xrightarrow{\beta_m} z.$$

(2) En outre, on définit

$$\varepsilon_x p = p = p \varepsilon_y \text{ et } \varepsilon_x = \varepsilon_x \varepsilon_x.$$

EXEMPLE. (1) Considérons le carquois

$$\alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ x \end{array}$$

Les chemins sont $\varepsilon_x, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots$.

(2) Considérons le carquois

$$x \xrightarrow{\alpha} y \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} z$$

Les chemins sont

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma.$$

Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois. Si $x, y \in Q_0$, alors $Q_1(x, y)$ désigne l'ensemble des flèches $\alpha : x \rightarrow y$.

1.4. DEFINITION. Soient $Q = (Q_0, Q_1)$ et $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ deux carquois.

(1) Un *morphisme de carquois* $\varphi : Q \rightarrow \Gamma$ se compose de deux applications

$$\varphi_0 : Q_0 \rightarrow \Gamma_0 : x \mapsto \varphi_0(x)$$

et

$$\varphi_1 : Q_1 \rightarrow \Gamma_1 : \alpha \mapsto \varphi_1(\alpha)$$

telles que

$$\varphi_1(Q_1(x, y)) \subseteq \Gamma_1(\varphi_0(x), \varphi_0(y)), \text{ pour tous } x, y \in Q_0.$$

(2) Un morphisme $\varphi : Q \rightarrow \Gamma$ est un *isomorphisme* si φ_0 et φ_1 sont bijectives.

(3) Un isomorphisme $\varphi : Q \rightarrow Q$ s'appelle *automorphisme*.

REMARQUE. L'action d'un morphisme $\varphi : Q \rightarrow \Gamma$ s'étend sur tous les chemins de Q de sorte que

(1) $\varphi(\varepsilon_x) = \varepsilon_{\varphi_0(x)}$, pour tout $x \in Q_0$;

(2) si $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ avec $\alpha_i \in Q_1$, alors $\varphi(p) = \varphi(\alpha_1) \cdots \varphi(\alpha_n)$.

EXEMPLE. (1) Le morphisme identité

$$1_Q : Q \rightarrow Q : x \mapsto x; \alpha \mapsto \alpha$$

est un automorphisme de Q .

(2) Considérons les carquois suivants:

$$\mathbb{A}_\infty : \quad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$

et

$$Q : \quad \alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ x \end{array}$$

En posant

$$\pi_0 : (\mathbb{A}_\infty)_0 \rightarrow Q_0 : x_i \mapsto x$$

et

$$\pi_1 : (\mathbb{A}_\infty)_1 \rightarrow Q_1 : \alpha_i \mapsto \alpha,$$

on obtient un morphisme de carquois $\pi : \mathbb{A}_\infty \rightarrow Q$ tel que

$$\pi(\alpha_i \cdots \alpha_{i+n}) = \alpha^n,$$

pour tous $i, n \in \mathbb{Z}$ avec $n > 0$.

Par contre, il n'a y pas de morphisme $Q \rightarrow \mathbb{A}_\infty$.

1.5. LEMMA. *Si Q est un carquois, alors ses automorphismes forment un groupe noté $\text{Aut}(Q)$.*

1.6. DEFINITION. Soient Q un carquois et G un groupe. Une G -action sur Q est un homomorphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(Q)$. Dans ce cas, pour tout $g \in G$, on a $\rho(g) = (\rho(g)_0, \rho(g)_1)$, et on pose

(1) $g \cdot x = \rho(g)_0(x)$, pour tout $x \in Q_0$;

(2) $g \cdot \alpha = \rho(g)_1(\alpha)$, pour tout $\alpha \in Q_1$.

Cette action est dite *libre* si, pour tous $g \in G$ non-identité et $x \in Q_0$, on a

$$g \cdot x \neq x.$$

EXEMPLE. Considérons le carquois suivant:

$$\mathbb{A}_\infty : \quad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\rho_n : \mathbb{A}_\infty \rightarrow \mathbb{A}_\infty : x_i \mapsto x_{i+n}; \alpha_i \mapsto \alpha_{i+n},$$

Il est évident que

$$\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{A}_\infty)$$

est un homomorphisme de groupes. Ceci donne une \mathbb{Z} -action sur \mathbb{A}_∞ . Cette action est libre. En effet, si $n \neq 0$, alors

$$n \cdot x_i = \rho_n(x_i) = x_{n+i} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Soit Q un carquois. Pour tout $x \in Q_0$, on désigne par x^+ l'ensemble des flèches de source x ; et par x^- l'ensemble des flèches de but x . On dit que Q est *localement fini* si x^+ et x^- sont finis, pour tout $x \in Q_0$.

1.7. DEFINITION. Soit \tilde{Q} un carquois muni d'une action libre d'un groupe G . Un morphisme de carquois

$$\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$$

s'appelle un *G-revêtement galoisien* si les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) L'application $\pi_0 : \tilde{Q}_0 \rightarrow Q_0$ est surjective.
- (2) Pour tous $g \in G$ et $u \in \tilde{Q}_0 \cup \tilde{Q}_1$, on a $\pi(g \cdot u) = \pi(u)$.
- (3) Si $x, y \in \tilde{Q}_0$ avec $\pi_0(x) = \pi_0(y)$, alors $y = g \cdot x$ pour certain $g \in G$.
- (4) Si $x \in \tilde{Q}_0$, alors π_1 induit deux bijections $x^+ \rightarrow \pi_0(x)^+$ and $x^- \rightarrow \pi_0(x)^-$.

REMARQUE. Pour tout $u \in Q_0 \cup Q_1$, d'après la Définition 1.7, $\pi^{-1}(u)$ est une G -orbite de \tilde{Q} .

EXEMPLE. (1) Considérons le morphisme $\pi : \mathbb{A}_\infty \rightarrow Q$, où

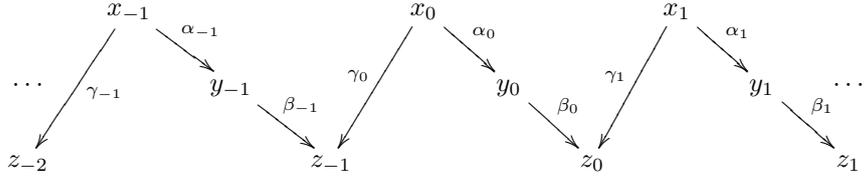
$$\mathbb{A}_\infty : \quad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$

et

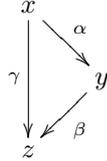
$$Q : \quad \alpha \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ x \end{array}$$

Si \mathbb{A}_∞ est muni de la \mathbb{Z} -action ci-haut mentionnée, alors π est un \mathbb{Z} -revêtement galoisien.

(2) Considérons le carquois \tilde{Q} :



et le carquois Q :



On munit \tilde{Q} une \mathbb{Z} -action telle que

$$n \cdot u_i = u_{i+1}, \text{ pour tous } u \in \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\}; i \in \mathbb{Z}.$$

Alors on a un \mathbb{Z} -revêtement galoisien comme suit:

$$\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q : u_i \mapsto u, \text{ où } u \in \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\}.$$

(3) Considérons les carquois suivants:

$$\mathbb{A}_\infty : \quad x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots$$

et

$$Q : \quad \alpha \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ x \end{array}$$

Alors on n'a aucun revêtement galoisien $\mathbb{A}_\infty \rightarrow Q$.

2. CATÉGORIES LINÉAIRES

On se fixe k un corps.

2.1. DEFINITION. Une catégorie k -linéaire \mathcal{C} est la donnée

- (1) d'une classe d'objets, notée \mathcal{C}_0 ;
- (2) de k -espaces de morphismes $\mathcal{C}(X, Y)$, pour $X, Y \in \mathcal{C}_0$;
- (3) d'une composition de morphismes

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) : (f, g) \mapsto f \cdot g,$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{C}_0$, qui est unitaire, associative, et k -bilinéaire.

EXEMPLE. On a deux catégories k -linéaires suivantes:

- (1) Mod- k : les objets sont les k -espaces vectoriels, les morphismes sont les applications k -linéaires, avec la composition usuelle.
- (2) mod- k : les objets sont les k -espaces vectoriels de dimension finie et les morphismes sont les applications k -linéaires, avec la composition usuelle.

2.2. DEFINITION. Soit Q un carquois. La *catégorie des chemines* de Q sur k , notée kQ , est la catégorie k -linéaire telle que définie ci-dessous:

- (1) Les objets de kQ sont les points de Q .
- (2) Si $x, y \in Q_0$, alors $(kQ)(x, y)$ est le k -espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des chemins de x vers y .
- (3) La composition des morphismes est induite de la composition des chemines de sorte que, pour tous chemins p, q , on a

$$p \cdot q = \begin{cases} pq, & \text{si } b(p) = s(q); \\ 0, & \text{si } b(p) \neq s(q). \end{cases}$$

EXEMPLE. (1) Considérons le carquois

$$Q : \quad \alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} x.$$

Alors kQ a un seul objet x et $\text{End}_{kQ}(x) = k[\alpha]$, l'anneau des polynômes en α .

(2) Considérons le carquois

$$\mathbb{A}_\infty : \quad x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

Alors kQ a pour objets x_i , avec $i \geq 0$; et

$$(kQ)(x_i, x_j) = \begin{cases} k \langle \varepsilon_{x_i} \rangle, & \text{si } i = j; \\ k \langle \alpha_i \cdots \alpha_j \rangle, & \text{si } i < j; \\ 0, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

2.3. DEFINITION. Soit \mathcal{C} une catégorie k -linéaire. Un *idéal* I de \mathcal{C} se compose de sous-espaces $I(X, Y)$ de $\mathcal{C}(X, Y)$, pour $X, Y \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$, tels que

$$f \in \mathcal{C}(X', X), g \in I(X, Y), h \in \mathcal{C}(Y, Y') \Rightarrow fgh \in I(X', Y').$$

Dans ce cas, la *catégorie quotient* \mathcal{C}/I est définie comme suit:

- (1) $(\mathcal{C}/I)_0 = \mathcal{C}_0$.
- (2) $(\mathcal{C}/I)(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)/I(X, Y)$ pour tous $X, Y \in (\mathcal{C}/I)_0$.

(3) Si $\bar{f} \in (\mathcal{C}/I)(X, Y)$ et $\bar{g} \in (\mathcal{C}/I)(Y', Z)$, alors

$$\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}.$$

2.4. DEFINITION. Une catégorie k -linéaire \mathcal{C} est dite *localement bornée* si, pour tout $X, Y \in \mathcal{C}_0$, les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est une algèbre locale.
- (2) Les k -espaces $\bigoplus_{Z \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(Z, X)$ et $\bigoplus_{Z \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(X, Z)$ sont de dimension finie.
- (3) $X \cong Y \Rightarrow X = Y$.

En outre, \mathcal{C} est dite *bornée* si elle est localement bornée et \mathcal{C}_0 est fini.

2.5. DEFINITION. Soit Q un carquois. Un idéal I de kQ est dite *admissible* si les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) I se compose de combinaisons linéaires de chemins de longueur > 1 .
- (2) Pour tout $x \in Q_0$, il existe un entier $n_x > 0$ tel que I contient tous les chemins de longueur $\geq n_x$ dont x est la source ou le but.

Dans ce cas, on appelle (Q, I) un *carquois lié*.

2.6. PROPOSITION. Soit Q un carquois localement fini. Si I est un idéal admissible de kQ , alors kQ/I est localement bornée.

EXEMPLE. Considérons kQ , où Q est le carquois suivant:

$$\sigma \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \longrightarrow \dots$$

Pour tous $0 \leq i \leq j$, désignons par p_{ij} le chemin de x_i vers x_j , ne contenant pas σ . On a alors un idéal admissible I de kQ défini par

$$I(x_i, x_j) = \begin{cases} k \langle p_{ij} \sigma^n, n = 2, 3, \dots, \rangle, & \text{si } 0 = i \leq j; \\ k \langle p_{ij} \rangle, & \text{si } 0 < i < j - 1; \\ 0, & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Considérons la catégorie quotient kQ/I . Pour abus de notation, les morphismes \bar{f} de kQ/I sont simplement notés f , mais liés par les relations $u = 0$, avec $u \in I$. Ainsi

$$(kQ/I)(x_i, x_j) = \begin{cases} k \langle \varepsilon_{x_0}, \sigma \rangle, & \text{si } 0 = i = j; \\ k \langle \alpha_1, \alpha_1 \sigma \rangle, & \text{si } (i, j) = (0, 1); \\ k \langle \varepsilon_{x_i} \rangle, & \text{si } 0 < i = j; \\ k \langle \alpha_i \rangle, & \text{si } 0 < i < i + 1 = j; \\ 0, & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

lié par les relations $\sigma^2 = 0$ et $\alpha_{i+1} \alpha_i = 0$, pour tout $i \geq 0$.

2.7. PROPOSITION. Soit \mathcal{C} une catégorie k -linéaire. Si \mathcal{C}_0 est fini, alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \bigoplus_{X, Y \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(X, Y)$$

est une k -algèbre, dont la multiplication est induite de la composition de morphismes de sorte que, pour $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y' \rightarrow Z$, on a

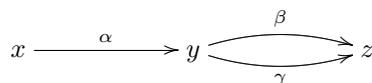
$$fg = \begin{cases} f \cdot g, & \text{si } Y = Y'; \\ 0, & \text{si } Y \neq Y'. \end{cases}$$

En outre, $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ est de dimension finie si et seulement si \mathcal{C} est bornée.

2.8. DEFINITION. Si Q est un carquois avec Q_0 fini, alors $\mathcal{A}(kQ)$ s'appelle algèbre des chemins de Q , notée $k[Q]$.

REMARQUE. $k[Q]$ a pour k -base l'ensemble des chemins dans Q .

EXAMPLE. Soit Q le carquois suivant:



Alors

$$\begin{aligned} k[Q] &= k \langle \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma \rangle \\ &= \{a_1\varepsilon_x + a_2\varepsilon_y + a_3\varepsilon_z + a_4\alpha + a_5\beta + a_6\gamma + a_7\alpha\beta + a_8\alpha\gamma \mid a_i \in k\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on a le résultat suivant.

2.9. PROPOSITION. Si A est une k -algèbre sobre de dimension finie, alors on a une catégorie k -linéaire bornée $\mathcal{C}(A)$ définie comme suit:

- (1) $\mathcal{C}(A)_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$, un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A .
- (2) $\mathcal{C}(A)(e_i, e_j) = e_i A e_j$, pour $1 \leq i, j \leq n$.
- (3) La composition des morphismes est induite de la multiplication de A .

Dans ce cas, $A = \mathcal{A}(\mathcal{C}(A))$.

REMARQUE. Une k -algèbre sobre de dimension finie n'est rien qu'une catégorie k -linéaire bornée. Plus généralement, on travaillera avec des catégories k -linéaire localement bornées.

3. REVÊTEMENTS GALOISIENS DE CATÉGORIES k -LINÉAIRES

Par tout dans cette section, on se fixe \mathcal{C}, \mathcal{D} des catégories k -linéaires, et G un groupe.

3.1. DEFINITION. Un foncteur k -linéaire $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est définie par la donnée

- (1) d'un objet $F(x) \in \mathcal{D}_0$, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$;
- (2) d'une application k -linéaire

$$F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y)) : f \mapsto F_{X,Y}(f) := F(f).$$

pour tout $(X, Y) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$.

- (3) $F(1_X) = 1_{F(X)}$, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$.
- (4) $F(fg) = F(f)F(g)$ pour tous $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$.

3.2. PROPOSITION. Tout morphisme de carquois $\varphi : Q \rightarrow \Gamma$ s'étend, par la k -bilinearité, à un foncteur k -linéaire $\varphi : kQ \rightarrow k\Gamma$ entre les catégories des chemins.

3.3. DEFINITION. Soient $E, F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs k -linéaires. Un morphisme fonctoriel $\eta : E \rightarrow F$ se compose de morphismes $\eta_X : E(X) \rightarrow F(X)$ de \mathcal{D} , où $X \in \mathcal{C}_0$, tels que, pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X) \\ E(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ E(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & F(Y). \end{array}$$

3.4. DEFINITION. Un foncteur k -linéaire $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ s'appelle *automorphisme* s'il existe un foncteur k -linéaire $E : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tels que $E \circ F = F \circ E = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$.

EXEMPLE. Le foncteur identité

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} : x \mapsto X; f \mapsto f$$

est un automorphisme k -linéaire de \mathcal{C} .

3.5. LEMMA. *Les automorphismes de \mathcal{C} forment un groupe, noté $\text{Aut}(\mathcal{C})$.*

3.6. DEFINITION. Une G -action sur \mathcal{C} est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}).$$

Dans ce cas, pour tout $g \in G$, on écrit

- (1) $g \cdot X = \rho(g)(X)$, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$;
- (2) $g \cdot f = \rho(g)(f)$, pour tout morphisme $f \in \mathcal{C}$.

3.7. DEFINITION. Soit \mathcal{C} munie d'une G -action. Un idéal I de \mathcal{C} est dit G -stable si $g \cdot f \in I$, pour tous $g \in G$ et $f \in I$.

On désigne par $\text{ind } \mathcal{C}$ la classe des objets indécomposables de \mathcal{C} .

3.8. DEFINITION. Une G -action sur \mathcal{C} est dite *admissible* si, pour tous $X, Y \in \text{ind } \mathcal{C}$, les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) $g \cdot X \not\cong X$, pour tout $g \in G$ non-identité.
- (2) $\mathcal{C}(X, g \cdot Y) \neq 0$ pour au plus un nombre fini de $g \in G$.

3.9. PROPOSITION. *Soit Q un carquois lié localement fini muni d'une G -action libre, et soit I un idéal admissible de kQ . Si I est G -stable, alors la G -action sur Q induit une G -action admissible sur kQ/I .*

3.10. DEFINITION. Soit \mathcal{C} munie d'une G -action admissible. Un foncteur k -linéaire $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ s'appelle G -revêtement galoisien si les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) Si $M \in \mathcal{D}$, alors $M \in \text{ind } \mathcal{D}$ si et seulement si $M \cong F(X)$ pour un certain $X \in \text{ind } \mathcal{C}$.
- (2) Si $X, Y \in \text{ind } \mathcal{C}$, alors $F(X) \cong F(Y)$ si et seulement si $Y = g \cdot X$ pour un certain $g \in G$.

(3) Pour tous $X, Y \in \mathcal{C}_0$, le foncteur F induit deux isomorphismes

$$F_{X,Y} : \quad \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}(X, g \cdot Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(F(X), F(Y))$$

et

$$F^{X,Y} : \quad \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}(g \cdot X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(F(X), F(Y)).$$

3.11. THEOREM. *Soit (Q, I) un carquois lié localement fini, et soit $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ un G -revêtement galoisien de carquois. Alors*

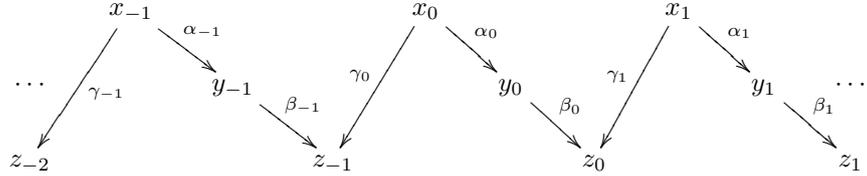
- (1) $\tilde{I} = \pi^{-1}(I)$ est un idéal admissible et G -stable de $k\tilde{Q}$.
- (2) \tilde{Q}/\tilde{I} est localement bornée et munie d'une G -action admissible.
- (3) Le G -revêtement galoisien de carquois $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ induit un G -revêtement galoisien de catégories k -linéaires

$$\pi : k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow kQ/I.$$

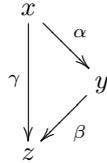
EXEMPLE. On a vu un \mathbb{Z} -revêtement galoisien de carquois

$$\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q : u_i \mapsto u, \text{ où } u \in \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\},$$

où \tilde{Q} est le carquois



et Q est le carquois:



Considérons $I = \langle \alpha\beta \rangle$, un idéal admissible de kQ . Alors

$$\tilde{I} = \pi^{-1}(I) = \langle \alpha_i\beta_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle$$

est un idéal admissible de $k\tilde{Q}$, et on a un \mathbb{Z} -revêtement de catégories k -linéaires localement bornées

$$\pi : k\tilde{Q}/\tilde{I} \rightarrow kQ/I.$$

4. CATÉGORIE DE MODULES

Soit \mathcal{C} une catégorie k -linéaire localement bornée.

4.1. DEFINITION. Un \mathcal{C} -module à droite est un foncteur k -linéaire $M : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}k$. Un tel module M est dit de *dimension finie* si $\sum_{X \in \mathcal{C}} \dim M(X) < \infty$.

NOTATION. On désigne par $\text{mod } \mathcal{C}$ la catégorie k -linéaire dont les objets sont les \mathcal{C} -modules à droite de dimension finie, les morphismes sont les morphismes fonctoriels, avec la composition usuelle.

4.2. PROPOSITION. Si \mathcal{C} est une catégorie k -linéaire bornée, alors il existe équivalence

$$\Phi : \text{mod } \mathcal{C} \longrightarrow \text{mod } \mathcal{A}(\mathcal{C}) : M \mapsto \bigoplus_{X \in \mathcal{C}_0} M(X),$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ est la k -algèbre associée à \mathcal{C} .

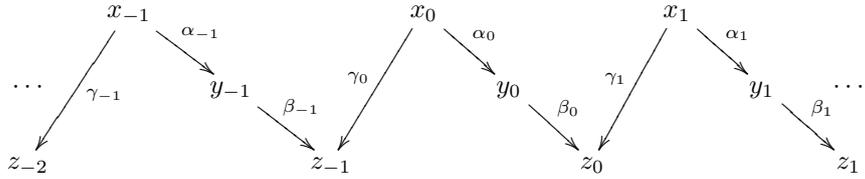
4.3. PROPOSITION. Soit $\Lambda = kQ/I$, où (Q, I) est un carquois lié. Supposons que $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_n \rangle$, avec $\rho_i \in kQ$.

- (1) Un objet M de $\text{mod } \Lambda$ se compose
 - 1) d'objets $M(x) \in \text{mod}k$, avec $x \in Q_0$;
 - 2) de morphismes $M(\alpha) : M(x) \rightarrow M(y)$ de $\text{mod}k$, avec $\alpha : x \rightarrow y \in Q_1$. tels que $M(\rho_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$.
- (2) Un morphisme $f : M \rightarrow N$ de $\text{mod } \Lambda$ se compose d'applications linéaires $f(x) : M(x) \rightarrow N(x)$, avec $x \in Q_0$, telles que, pour toute $\alpha : x \rightarrow y \in Q_1$,

$$\begin{array}{ccc} M(x) & \xrightarrow{M(\alpha)} & M(y) \\ f(x) \downarrow & & \downarrow f(y) \\ N(x) & \xrightarrow{N(\alpha)} & N(y) \end{array}$$

est commutatif.

EXEMPLE. Considérons $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$, où \tilde{Q} est le carquois suivant lié par les relations $\alpha_i \beta_i = 0$, $i \in \mathbb{Z}$:



Pour tout $a \in \tilde{Q}_0$, on pose

$$M(a) = \begin{cases} k \langle a \rangle, & \text{si } a \in \{z_0, x_1, y_1\}; \\ 0, & \text{sinon}; \end{cases}$$

et pour tout $\alpha \in \tilde{Q}_1$, on pose

$$M(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in \{\gamma_1, \alpha_1\}; \\ 0, & \text{sinon}; \end{cases}$$

Comme $M(\alpha_i\beta_i) = 0$, $i \in \mathbb{Z}$, on voit que M est un Λ -module à droite. On représente M simplement par le sous-carquois suivant:

$$\begin{array}{ccc} & k \langle x_1 \rangle & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ 1 & & 1 \\ & k \langle z_0 \rangle & k \langle y_1 \rangle \end{array}$$

Par contre, si l'on pose

$$N(a) = \begin{cases} k \langle a \rangle, & \text{si } a \in \{z_0, x_1, y_1, z_1\}; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et

$$N(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in \{\gamma_1, \alpha_1, \beta\}; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

Comme $M(\alpha_1\beta_1) \neq 0$, $i \in \mathbb{Z}$, on voit que N n'est pas un Λ -module à droite.

4.4. DEFINITION. Si \mathcal{C} est munie d'une action d'un groupe G , alors cette action induit une G -action sur $\text{mod}\mathcal{C}$ telle que, pour tout $g \in G$,

- (1) pour tout module M , on a $g \cdot M = M \circ g^{-1}$;
- (2) pour tout morphisme $f : M \rightarrow N$, le morphisme $g \cdot f : g \cdot M \rightarrow g \cdot N$ est défini, pour $x \in \mathcal{C}_0$, par

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) : M(g^{-1} \cdot x) \rightarrow N(g^{-1} \cdot x).$$

4.5. PROPOSITION. Soit \mathcal{C} munie d'une action admissible d'un groupe G . Si G est sans torsion, alors la G -action sur $\text{mod}\mathcal{C}$ est admissible.

5. FONCTEUR D'ABAISSEMENT

Soit $\Lambda = kQ/I$, avec (Q, I) carquois lié localement fini. On fixe un G -revêtement galoisien de carquois

$$\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q,$$

où G est sans torsions et \tilde{Q} est localement fini. Alors $\tilde{I} = \pi^{-1}(I)$ est un idéal admissible et G -stable de $k\tilde{Q}$ tel que

$$\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$$

est localement bornée ayant une G -action admissible. En outre, le revêtement galoisien de carquois $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ induit un G -revêtement galoisien de catégories linéaires

$$\pi : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda.$$

La stratégie est de relier $\text{mod}\tilde{\Lambda}$ et $\text{mod}\Lambda$. D'abord, la G -action admissible sur $\tilde{\Lambda}$ induit une G -action admissible sur $\text{mod}\tilde{\Lambda}$, et Bongartz et Gabriel ont construit le *foncteur d'abaissement*

$$\pi_\lambda : \text{mod}\tilde{\Lambda} \rightarrow \text{mod}\Lambda.$$

En effet, étant donné un $\tilde{\Lambda}$ -module M , on définira $\pi_\lambda(M) \in \text{mod}\Lambda$ de la façon suivante.

Pour tout $a \in Q_0$, on pose

$$\pi_\lambda(M)(a) = \bigoplus_{x \in \pi^{-1}(a)} M(x),$$

où $\pi^{-1}(a) = \{x \in \tilde{Q}_0 \mid \pi^{-1}(x) = a\}$ est une G -orbite.

Soit $\alpha : a \rightarrow b \in Q_1$. Pour tout $x \in \pi^{-1}(a)$, il existe unique $\alpha_x : x \rightarrow y \in \pi^{-1}(b)$. En particulier, $y \in \pi^{-1}(b)$ et $M(\alpha_x) : M(x) \rightarrow M(y)$. Supposons que $x' \in \pi^{-1}(a)$ et $\alpha_{x'} : x' \rightarrow y' \in \pi^{-1}(b)$. Si $x' \neq x$, alors $y \neq y'$. Ainsi, on pose

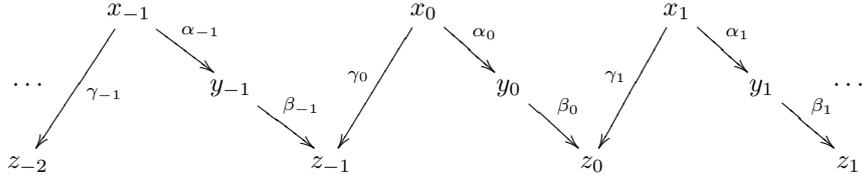
$$\pi_\lambda(M)(\alpha) = \bigoplus_{x \in \pi^{-1}(a)} M(\alpha_x) : \bigoplus_{x \in \pi^{-1}(a)} M(x) \rightarrow \bigoplus_{y \in \pi^{-1}(b)} M(y).$$

Comme M s'annule sur \tilde{I} , on voit que $\pi_\lambda(M)$ s'annule sur I . C'est-à-dire, $\pi_\lambda(M)$ est un Λ -module.

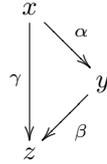
EXEMPLE. Considérons le \mathbb{Z} -revêtement galoisien

$$\pi : k\tilde{Q} \rightarrow kQ,$$

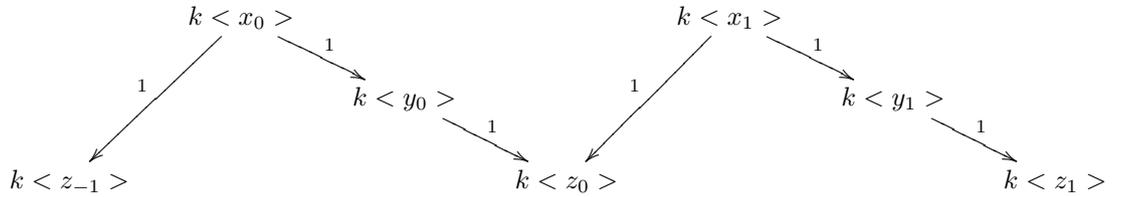
où \tilde{Q} est le carquois sans relations:



et Q est le carquois sans relations suivant:



Considérons le $k\tilde{Q}$ -module M suivant:



Alors $\pi_\lambda(M)$ est le kQ -module suivant:

$$\begin{array}{ccc}
k \langle x_0, x_1 \rangle & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \searrow & k \langle y_0, y_1 \rangle \\
k \langle z_{-1}, z_0, z_1 \rangle & \swarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

5.1. THEOREM. *Le foncteur $\pi_\lambda : \text{mod } \tilde{\Lambda} \rightarrow \text{mod } \Lambda$ a des propriétés suivantes.*

(1) *Si $M, N \in \text{ind } \tilde{\Lambda}$, alors $\pi_\lambda(M), \pi_\lambda(N) \in \text{ind } \Lambda$, et*

$$\pi_\lambda(M) \cong \pi_\lambda(N) \Leftrightarrow N \cong g \cdot M, \text{ pour un certain } g \in G.$$

(2) *Pour tous $M, N \in \text{mod } \tilde{\Lambda}$, le foncteur π_λ induit deux isomorphismes*

$$\bigoplus_{g \in G} \text{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(M, g \cdot N) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_\Lambda(\pi_\lambda(M), \pi_\lambda(N))$$

et

$$\bigoplus_{g \in G} \text{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(g \cdot M, N) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_\Lambda(\pi_\lambda(M), \pi_\lambda(N)).$$

(3) *π_λ est un G -revêtement galoisien \Leftrightarrow il est dense.*

On dit que Λ est *localement de représentation-finie* si, pour tout $x \in Q_0$, il existe au plus un nombre fini de $M \in \text{ind } \Lambda$ tel que $M(x) \neq 0$.

5.2. THEOREM. *Si Λ est localement de représentation-finie, alors*

$$\pi_\lambda : \text{mod } \tilde{\Lambda} \rightarrow \text{mod } \Lambda$$

est un G -revêtement galoisien de catégories k -linéaires, et il induit un G -revêtement galoisien de carquois à translation

$$\pi_\lambda : \Gamma_{\tilde{\Lambda}} \rightarrow \Gamma_\Lambda$$

entre les carquois d'Auslander-Reiten.

EXEMPLE. Considérons le \mathbb{Z} -revêtement galoisien

$$\pi : k\tilde{Q} \rightarrow kQ,$$

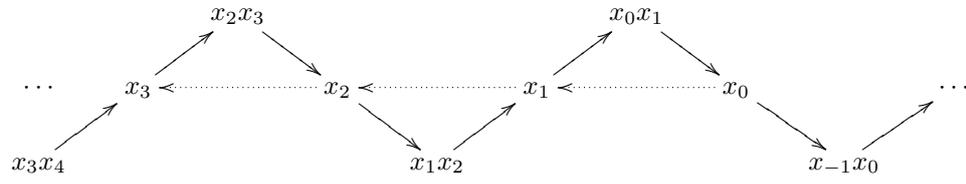
où

$$\tilde{Q} : \quad \cdots \longrightarrow x_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \quad \tilde{I} = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

et

$$Q : \quad \alpha \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ x \end{array} \quad I = \langle \alpha^2 \rangle$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de $k\tilde{Q}$ est le suivant:



Le carquois d'Auslander-Reiten de kQ est le suivant:



où x^2 est le kQ -module suivant:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset x^2$$